RIGID MOTION
ದೃಢ ಚಲನೆ

TEXT BOOK FOR FIRST B.Sc. CLASS
ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿಗೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

G. T. NARAYANA RAO

BANGALORE UNIVERSITY PUBLICATION DIVISION
1969

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ

ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳು

1	ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ 1, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ .. .. —ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರು	4–00
2	ಕಾವ್ಯಲಹರಿ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) .. .. —ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿ ಮತ್ತು ಇತರರಿಂದ ಸಂಪಾದಿತ	2–00
3	ಮನಃಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) .. .. —ಎಸ್. ಕೆ. ರಾಮಚಂದ್ರರಾವ್	3–50
4	ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ (I ಬಿ.ಎಸ್ಸಿ.) .. —ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್	3–20
5	ರಾಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) .. .. —ಹೆಚ್. ಆರ್. ದಾಸೇಗೌಡ ಮತ್ತು ಎಂ. ಎ. ಸಿಂಗಮ್ಮಾಳ್	3–80
6	ಸಂಗೀತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಕಾಶಿಕೆ (I ಬಿ.ಎ.) .. .. —ಟಿ. ಆರ್. ನಾಗರತ್ನ	3–20
7	ಸಂಗೀತಶಾಸ್ತ್ರ ಬೋಧಿನಿ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) .. —ಜಿ. ಚನ್ನಮ್ಮ	2–50
8	ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) .. .. —ಹೆಚ್. ಆರ್. ಸಾಖರೆ	3–20
9	ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) .. .. —ಬಿ. ವಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್	4–00
10	ಸಾಮಾನ್ಯ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್ಸಿ.) .. .. —ಕೆ. ಶೇಷಾದ್ರಿ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್	3–30
11	ವಾಣಿಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) .. .. —ಟಿ. ಹೆಚ್. ನಾರಾಯಣರಾವ್	3–00
12	ಭೂಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.) .. —ಎ. ಕುಮಾರಸ್ವಾಮಿ	4–80

RIGID MOTION

ದೃಢಚಲನೆ

TEXT BOOK FOR FIRST B.Sc. CLASS

ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿಗೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

G. T. NARAYANA RAO

BANGALORE UNIVERSITY PUBLICATION DIVISION
1969

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕರು: ಡಾ॥ ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿ

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ: 25

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಪಾದಕ ಸಮಿತಿ: ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ
ಡಾ॥ ಸಿ. ಎಸ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸೈಯ್ಯಂಗಾರ್
ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ಬೆಲೆ ರೂ. 2–00

ಮುದ್ರಣ: ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು 18

ಮುನ್ನುಡಿ

ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಕಾಲೇಜು ಮಟ್ಟದ ವಿದ್ಯಾ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂದು ಬಯಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕ ಸೌಕರ್ಯಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿಕೊಡಬೇಕು; ಜೊತೆಯಲ್ಲಿಯೇ, ಉನ್ನತ ಮಟ್ಟದ ಜ್ಞಾನದಾನವು ಮಾತೃಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ನಡೆಯಲು ಸಮರ್ಪಕ ವಾತಾವರಣವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು—ಇವೆರಡು ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಜನವರಿ 1967ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿತು. ಅದು ಅಖಿಲ ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾಧೋರಣೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿಯೂ ಇತ್ತು.

ಇದರ ಅಂಗವಾಗಿ, 1967–68 ಪ್ರೀಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಐಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ, ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ಒಂದು ವಿಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬಹುದೆಂದು ಕಾಲೇಜುಗಳಿಗೆ ಆದೇಶ ನೀಡಲಾಯಿತು. ಜೊತೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಯೋಗ್ಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಒದಗಿಸಿಕೊಡುವ ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ವಹಿಸಿಕೊಂಡಿತು. ಇದರ ನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಯು ರೂಪುಗೊಂಡಿತು. ಡಾ॥ ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿಯವರ ಅಧ್ಯಕ್ಷತೆಯಲ್ಲಿ ನೇಮಕವಾದ ಈ ಸಮಿತಿಯು ಹೊಸದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ನಡೆದು ಇದೀಗ ಹಲವಾರು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಗೊಳಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಇಂತಹ ಒಂದು ಪವಿತ್ರ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕವಾಗಿರುವ ಶಕ್ತಿಗಳು ಹಲವಾರು—ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಗಳು, ಲೇಖಕರು, ಭಾಷಾತಜ್ಞರು, ಮುದ್ರಣಕಾರರು, ಮೊದಲಾದವರು; ಮತ್ತು ಇವರನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದುಗೂಡಿಸಿ ಕ್ಷಿಪ್ರವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರಿ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ. ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಋಣಿಯಾಗಿದೆ; ಅವರ ವಿಶ್ವಾಸಪೂರ್ಣ ಸೇವೆಯನ್ನು ಮೆಚ್ಚಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆ ಬೆಳೆಯದೇ ವಿಶ್ವದ ಆಧುನಿಕ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ, ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಸಾಕಷ್ಟು ಗ್ರಂಥಗಳು ಬರದೇ ಭಾಷೆ ಬೆಳೆಯುವಂತಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಷವರ್ತುಲಭೇದನದ ದಾರಿ ಒಂದೇ—ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ತಜ್ಞರ ನೆರವಿನಿಂದ ಗ್ರಂಥರಚನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುವ ತೊಡರುಗಳು ಹಲವಾರು—ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲ ತಜ್ಞರು ಯಾರು? ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ವಿಚಾರವೇನು? ಯಾರಿಗಾಗಿ

ಬರೆಯುವುದು? ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಯ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕಾರ್ಯವು ಇವೆಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗಾದರೂ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದೆ.

ಮುಂಬರುವ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳೂ, ಇತರ ಪುಸ್ತಕಗಳೂ ವಿಪುಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿತವಾಗಿ ಕನ್ನಡದ ಸಜೀವ ಮಾಧ್ಯಮದ ಮೂಲಕ ಪ್ರಪಂಚದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಜ್ಞಾನವು (ಅತ್ಯಾಧುನಿಕ ಜ್ಞಾನ ಸಹ) ಕನ್ನಡ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವುದೆಂದು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ,
ಬೆಂಗಳೂರು,
5–6–1968

ವಿ. ಕೃ. ಗೋಕಾಕ್,
ಉಪಕುಲಪತಿ

ನಾಲ್ಕು ಮಾತು

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯೇ ಉಚ್ಚ ವ್ಯಾಸಂಗದಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಬೇಕೆಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿತು. ಆದರೆ ಸದ್ಯದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಐಚ್ಛಿಕವಾಗಿಡುವುದು ಯುಕ್ತ ಎಂಬ ನಿರ್ಣಯವನ್ನು ಅದು ಕೈಗೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಕಟನೆಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ ಒಂದನ್ನು ನೇಮಕ ಮಾಡಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಿತಿಯು ಪರವಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆಂದು ಅನುಭವಿಕರಾದ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಕೇಳಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಆಯಾ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿಯ ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ, ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ಸಂಪಾದಕ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಲಿ, ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ ಲೇಖಕರಿಂದ ಬರುವ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಬಿನ್ನವಿಸಲಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರಿಂದ ನೋಡಿಸಬೇಕೆಂದೂ ಗೊತ್ತಾಯಿತು. ಈ ಎಲ್ಲ ಬಗೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಪರಿಪೂರ್ಣವೂ ನಿರ್ದುಷ್ಟವೂ ಆದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ರಚಿತವಾಗಬೇಕೆಂದೂ ಅದು ಸೊಗಸಾಗಿ ಮುದ್ರಿತವಾಗಬೇಕೆಂದೂ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಯತ್ನಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಪಠ್ಯವೆಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ—ಕನ್ನಡ ಜನಕ್ಕೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೆ ಉತ್ತಮ ಜ್ಞಾನವು ಉಪಲಬ್ಧವಾಗಲಿ ಎಂಬ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಉದ್ದೇಶವೂ ಈ ಮಹಾ ಕಾರ್ಯದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿದೆ.

ಈ ಕಾರ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗುವುದೋ ಅಷ್ಟು ವೇಗದಿಂದ ಐಚ್ಛಿಕವಾದ ಮಾಧ್ಯಮವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಕಡ್ಡಾಯವಾದ ಮಾಧ್ಯಮ ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳದೆ ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಅದನ್ನೇ ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಇಚ್ಛೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಾಣಮಾಡುತ್ತದೆ. ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಬಗೆಯ ಸಾಧಕ ಬಾಧಕ ಚರ್ಚೆ ನಡೆದಿದೆ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಜ್ಞಾನದ ಆಕಲನ ಮತ್ತು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಇವೆರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ನಾಗರಿಕ ಇವರ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಪರಕೀಯ ಭಾಷೆಯ ಅಡ್ಡಿ ಆತಂಕಗಳನ್ನು ಒಡ್ಡದೆ ಅವರವರ ಸ್ವಂತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನಸಾಮಗ್ರಿಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ಸಾರ್ಥಕವಾಗುತ್ತದೆ. ನಿರ್ಮಾಣಶೀಲವಾದ ವಿಚಾರವಂಶಿಕೆ ಮತ್ತು ಮುಕ್ತರೀತಿಯ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅವಕಾಶ

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ನಿಷ್ಠೆಯಿಂದ ಕಾರ್ಯಪ್ರವೃತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಯೋಜನೆಗೆ ರೂಪಕೊಟ್ಟು ಅದನ್ನು ಕಾರ್ಯಗತ ಮಾಡುವ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಗೆ ಎಲ್ಲ ಬಗೆಯ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಮುನ್ನುಡಿ ಬರೆದಿರುವ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಉಪಕುಲಪತಿಗಳಾಗಿರುವ ಡಾ॥ ವಿ. ಕೆ. ಗೋಕಾಕ್ ಅವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ವಂದನೆಗಳು. ನಮ್ಮ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸರ್ವ ವಿಧವಾದ ನೆರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿರುವ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ರಿಜಿಸ್ಟ್ರಾರ್ ಶ್ರೀ ಪಿ. ಮಲ್ಲಿಕಾರ್ಜುನಪ್ಪನವರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಹಾರ್ದಿಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶ್ರಮವಹಿಸಿ ಬರೆದಿರುವ ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್ ಅವರಿಗೆ ಮತ್ತು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮುದ್ರಣಕ್ಕೆ ಶಿಫಾರಸು ಮಾಡಿದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷ ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾರಿಗೆ ಮತ್ತು ಸದಸ್ಯ ಡಾ॥ ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸೈಯ್ಯಂಗಾರ್ಯರಿಗೆ ನಮ್ಮ ವಂದನೆಗಳು. ಇದನ್ನು ಅಂದವಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿದ ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್ಸಿಗೆ ನಾವು ಕೃತಜ್ಞರು.

ಪಠ್ಯಸಮಿತಿಯ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನನಗೆ ನಿತಾಂತ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದಲೂ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದಲೂ ಸಹಾಯ ನೀಡುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾಯರಿಗೂ ನಾನು ಹಾರ್ದಿಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿ,
ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕ,
ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ

ಬೆಂಗಳೂರು,
25–5–1969

PREFACE

Rigid Motion covers a section of the First B.Sc. Mathematics Syllabus of the Bangalore University. An earnest attempt has been made here to collect the materials from a host of source books, —each making a passing reference to Rigid Motion and dealing with it according to its own convenience, —and to put them into the framework of a text book. The simultaneous presentation of the subject-matter in English and Kannada is an additional feature of this book.

I acknowledge with deep gratitude the continuous guidance and help I have received from Prof. F. J. Noronha, Head of the Department of Mathematics in the Bangalore University and Dr C. N. Srinivasiengar, Retired Professor of Mathematics. They have literally led me across unknown paths, *made me known to friends whom I knew not* and helped me shape new ideas and approaches. I bow to them in deep reverence.

I thank the authorities of the Bangalore University and in particular Dr R. S. Mugali, Chairman of the Kannada Text Book Committee, for asking me to write this book.

Sri V. R. Phaneendra Simha, M.Sc., has done a good job in reading the proof sheets. Sri S. R. Patil has translated the ideas into figures. As usual the Bangalore Press have done an excellent job in printing the abstract *language of science* in an attractive and elegant way. I appreciate their good work and thank them sincerely.

Government College
Bangalore,
25 *May* 1969

G. T. NARAYANA RAO

CONTENTS
ವಿಷಯಾನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

Page ಪುಟ

RIGID MOTION

ದೃಢಚಲನೆ

1 FUNDAMENTAL CONCEPTS

1.1 Point, straight line, plane

We understand the meaning of these words intuitively. They cannot be defined precisely. Such words are called *undefined words*. New concepts are defined in terms of undefined words.

1.2 Space

We consider space as a *set* S. The *elements* of S are points. If the set of straight lines is L and the set of planes is P then $L \subset S$, $P \subset S$. All straight lines and planes are sets of points.

"A point x lies on a line l" is symbolically written $x \in l$.

"A line l lies on a plane p" is symbolically written $l \subset p$.

"Two straight lines l and m intersect at the point x" is symbolically written

$$l \cap m = \{x \mid x \in l,\ x \in m\}.$$

"The intersection of two planes p and q is a straight line l" is symbolically written

$$p \cap q = \{l \mid l \subset p,\ l \subset q\}.$$

1.3 Geometrical figure

A set of points in the space S constitutes a *geometrical figure*. We are familiar with plane geometrical figures like a triangle, circle, quadrilateral, etc.

1 ಮೂಲಭಾವನೆಗಳು

1.1 ಬಿಂದು, ಸರಳರೇಖೆ, ಸಮತಲ

ಈ ಪದಗಳ ಅರ್ಥ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯಿಂದ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳನ್ನು **ಅವ್ಯಾಖ್ಯಿತ ಪದಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವ್ಯಾಖ್ಯಿತ ಪದಗಳ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ಹೊಸ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಪದರೂಪವನ್ನಿತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.2 ಆಕಾಶ

ಇದನ್ನು S ಎಂಬ ಒಂದು ಗಣವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. **ಬಿಂದುಗಳು S ನ ಗಣಾಂಶಗಳು.** ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಗಣ L ಮತ್ತು ಸಮತಲಗಳ ಗಣ P ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $L \subset S$, $P \subset S$. ಎಲ್ಲ ಸರಳರೇಖೆಗಳೂ ಸಮತಲಗಳೂ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣಗಳು.

"x ಬಿಂದು l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ." ಈ ವಾಕ್ಯದ ಸಾಂಕೇತಿಕ ರೂಪ $x \in l$.

"l ಸರಳರೇಖೆ p ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆ." ಈ ವಾಕ್ಯದ ಸಾಂಕೇತಿಕ ರೂಪ $l \subset p$.

"l ಮತ್ತು m ಸರಳರೇಖೆಗಳು x ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ." ಈ ವಾಕ್ಯದ ಸಾಂಕೇತಿಕ ರೂಪ

$$l \cap m = \{x \mid x \in l, x \in m\}$$

"p ಮತ್ತು q ಸಮತಲಗಳು l ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ." ಈ ವಾಕ್ಯದ ಸಾಂಕೇತಿಕ ರೂಪ

$$p \cap q = \{l \mid l \subset p, l \subset q\}$$

1.3 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿ

ಆಕಾಶ S ನಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣವು ಒಂದು **ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು** ರಚಿಸುವುದು. ತ್ರಿಭುಜ, ವೃತ್ತ, ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಂತಾದ ಸಮತಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ನಮಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತವಾಗಿವೆ.

1.4 Axioms

An axiom is an *initial proposition* which is assumed to be true. A set of undefined words connected to express a concept forms an *axiom* or a *postulate*. We shall now state the postulates that are necessary in the present context.

***Postulate* 1.** Given any two different points there is one and only one straight line containing them.

If x and y are the two points ($x \neq y$) contained by the line l and m is any other line, according to this postulate $x, y \in l$; both $x, y \notin m$.

***Postulate* 2.** A coordinate system can be fitted into every straight line. This is called the *ruler postulate*.

According to this postulate

(*a*) to every real number there corresponds one and only one point on the straight line;

(*b*) to every point on the straight line there corresponds one and only one real number; and

(*c*) the *distance* between the two points on the straight line is the absolute value of the difference of the corresponding real numbers.

Let two points A and B lie on the straight line l. Then $A, B \in l$. Let the coordinates of A and B in a coordinate system be x_1, x_2. When $A \neq B$, $x_1 \neq x_2$. Further, $A \leftrightarrow x_1$, $B \leftrightarrow x_2$. The distance AB then is $|x_1 - x_2|$. It is written $d(A, B) = |x_1 - x_2|$.

***Postulate* 3.** Given any two different points A and B on a straight line l, it is possible to fit a coordinate system into l such that the coordinate of A is zero and that of B is positive. This is called the *ruler replacement postulate*.

1.4 ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಗಳು

ನಾವು ನಿಜವೆಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸಿರುವ ಹಲವಾರು ಮೂಲಭಾವನೆಗಳ ವಾಕ್ಯ ರೂಪವೇ **ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ.** ಅವ್ಯಾಖ್ಯಿತ ಪದಗಳ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ಇದು ದೊರೆಯುವುದು. ನಮ್ಮ ಮುಂದಿನ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಆವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 1. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತವಾಗಿರುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಿದೆ.

x ಮತ್ತು y ಗಳು l ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $(x \neq y)$ ಮತ್ತು m ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಈ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧದ ಪ್ರಕಾರ $x, y \in l$; x, y ಎರಡೂ $\notin m$.

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 2. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೂ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು **ನಿರ್ದೇಶಕ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧದ ಪ್ರಕಾರ

(a) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ;

(b) ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ; ಮತ್ತು

(c) ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ **ದೂರ** ಆ ಬಿಂದುಗಳ ಅನುರೂಪ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ನಿಜಮೌಲ್ಯವಾಗಿದೆ.

A, B ಬಿಂದುಗಳು l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $A, B \in l$. ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರಕಾರ A, B ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು x_1, x_2 ಆಗಿರಲಿ. A, B ಗಳು ಭಿನ್ನವಾಗಿರುವಾಗ $x_1 \neq x_2$ $A \leftrightarrow x_1$ $B \leftrightarrow x_2$. A, B ಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು "ದೂರ A, B" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $d(A, B)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $d(A, B) = |x_1 - x_2|$.

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 3. l ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ A ಮತ್ತು B ಎನ್ನುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತವಾಗಿರುವಾಗ, A ಯ ನಿರ್ದೇಶಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ, B ಯ ನಿರ್ದೇಶಕವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ l ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಇದನ್ನು **ಬದಲಿ ನಿರ್ದೇಶಕ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.5 Betweenness

Let any three different points A, B, C lie on the straight line l. Let their coordinates be respectively $0, x, y$ $(x, y > 0)$. Then $d(A, B) = x$, $d(A, C) = y$. If $x > y$ then $d(A, B) > d(A, C)$. In this case C is *between* A and B. If $x < y$ then $d(A, B) < d(A, C)$. In this case B is between A and C. It may be added that the concept of *betweenness* relates to three collinear points only. Symbolically $\mathbf{B}(ABC)$ means, of the three collinear points A, B, C the point B lies between A and C.

1.6 Straight line, segment of a straight line

Let l be a straight line. Let A and B be two points on it. $A, B \in l$. The portion of the straight line lying between A and B is called the *segment* of l. It is written $\overline{AB}$. By a *ray* $\overrightarrow{AB}$ we mean the set of points X on l such that A is not between B and X or between X and B. In other words the ray $\overrightarrow{AB}$ consists of all points of l starting from A and proceeding towards and beyond B to infinity. If C is a point on l such that A is between C and B, *i.e.*, $\mathbf{B}(CAB)$, then the rays $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ are in opposite directions. They are called *opposite rays*.

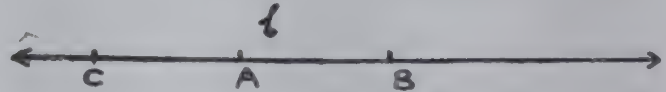


Fig. 1.1

1.7 Convex sets

A set E is called *convex* if for every two points P and Q of E the entire segment $\overline{PQ}$ lies on E.

1.5 ಅಂತರತೆ

A, B, C ಬಿಂದುಗಳು l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $0, x, y$ $(x, y > 0)$ ಆಗಿರಲಿ. $x > y$ ಆಗಿರುವಾಗ $d(A, B) > d(A, C)$. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ C ಯು A, B ಗಳ **ಅಂತರದಲ್ಲಿ** (ಅಥವಾ ನಡುವೆ) ಇದೆ. $x < y$ ಆಗಿರುವಾಗ $d(A, B) < d(A, C)$. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ B ಯು A, C ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ. **ಅಂತರತೆ** ಎಂಬ ಭಾವನೆ ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದೆಂದು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳು A, B, C ಯಲ್ಲಿ B ಯು A ಮತ್ತು C ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ **B(ABC)** ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.6 ಸರಳರೇಖೆ, ರೇಖಾಖಂಡ

l ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $A, B \in l$. A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಭಾಗವನ್ನು l ನ **ರೇಖಾಖಂಡ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\overline{AB}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. X ಎಂಬುದು l ಮೇಲಿರುವ ಹಲವಾರು ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ. A ಯು B ಮತ್ತು X ಅಥವಾ X ಮತ್ತು B ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವಂತೆ X ಗಣವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು $\overrightarrow{AB}$ ಕಿರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $\overrightarrow{AB}$ ಕಿರಣವು A ಯಿಂದ ತೊಡಗಿ B ಯೆಡೆಗೆ l ಮೇಲೆ ಹೋಗಿ ಮುಂದೆ ಅನಂತದೆಡೆಗೆ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದರ್ಥ. A ಯು C ಮತ್ತು B ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ, ಅಂದರೆ B(CAB) ಆಗಿರುವಂತೆ, C ಬಿಂದುವಿದ್ದರೆ ಆಗ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ಕಿರಣಗಳು ವಿರೋಧ ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳ ಹೆಸರು **ವಿರೋಧ ಕಿರಣಗಳು.**



ಚಿತ್ರ 1.1

1.7 ಉಬ್ಬುಗಣಗಳು

P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ PQ ರೇಖಾಖಂಡವು E ಗಣದ ಮೇಲೆಯೇ ಇರುವುದಾದರೆ ಅಂಥ ಗಣ E ಯನ್ನು **ಉಬ್ಬುಗಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

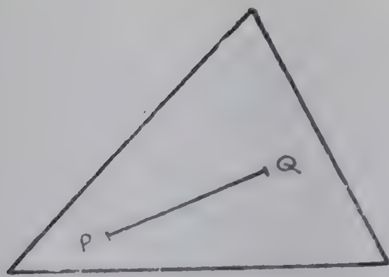


Fig. 1.2

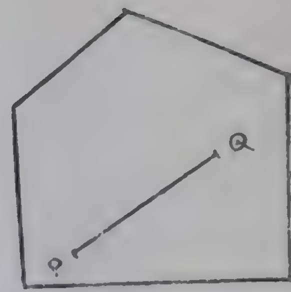


Fig. 1.3

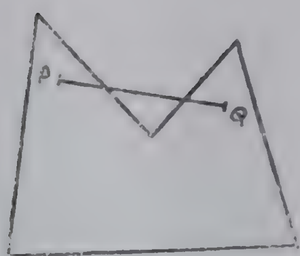


Fig. 1.4

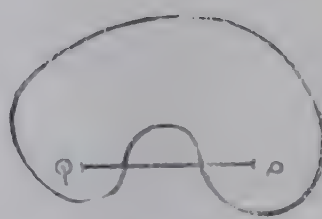
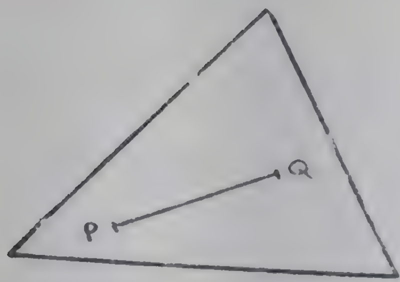


Fig. 1.5

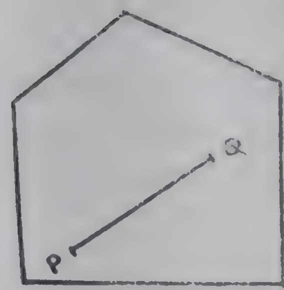
It is easy to see that figures 1.2 and 1.3 represent convex sets whereas the sets in figures 1.4 and 1.5 are not convex sets.

1.8 One-one correspondence

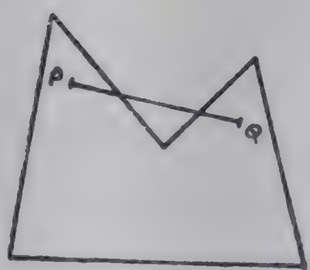
Consider the two sets $A = \{a, b, c, d\}$ and $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Since the number of elements in each is the same a *correspondence* can be established in which to every element of A there corresponds one and only one element of B and conversely to every element of B there corresponds one and only one element of A. For example, $a \leftrightarrow 3$, $b \leftrightarrow 1$, $c \leftrightarrow 4$, $d \leftrightarrow 2$ and this exhausts the list. Such a relationship between the elements of A and B is called a *one-one correspondence*. It is written (1, 1) correspondence. There can be no (1, 1) correspondence between the elements of the sets $A = \{a, b, c, d\}$ and $C = \{5, 6\}$ since the numbers of elements in A and C are different.



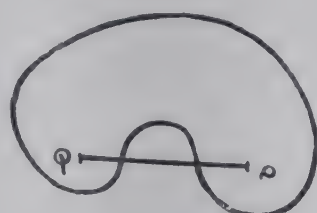
ಚಿತ್ರ 1.2



ಚಿತ್ರ 1.3



ಚಿತ್ರ 1.4



ಚಿತ್ರ 1.5

ಚಿತ್ರ 1.2 ಮತ್ತು 1.3 ರಲ್ಲಿ $\overline{PQ}$ ರೇಖಾಖಂಡವು E ಗಣದ ಮೇಲೆಯೇ ಇವೆ; 1.4 ಮತ್ತು 1.5 ರಲ್ಲಿ ರೇಖಾಖಂಡದ ಸ್ವಲ್ಪಾಂಶ ಹೊರಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲಿನವು ಉಬ್ಬುಗಣಗಳು; ಎರಡನೆಯವು ಉಬ್ಬುಗಣಗಳಲ್ಲ.

1.8 ಒಂದು-ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ

$A = \{a, b, c, d\}$ ಮತ್ತು $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇವೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ A ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ B ಯ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಗಣಾಂಶವನ್ನೂ, ವಿಲೋಮವಾಗಿ, B ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ A ಯ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಗಣಾಂಶವನ್ನೂ **ಹೊಂದಾಣಿಕೆಗೊಳಿಸಬಹುದು**. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $a \leftrightarrow 3$, $b \leftrightarrow 1$, $c \leftrightarrow 4$, $d \leftrightarrow 2$. ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶಗಳೂ ಮುಗಿದಿವೆ. A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳ ಗಣಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು **ಒಂದು-ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದೂ ಇದೆ. $A = \{a, b, c, d\}$ ಮತ್ತು $C = \{5, 6\}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಗಣಾಂಶಗಳ ನಡುವೆ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇರುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. A ಮತ್ತು C ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆಯಷ್ಟೆ.

1.9 Transformation

Consider two different sets X and Y. Let $x \in X$, $y \in Y$. If there is an operation which transforms X into Y, then according to the rule of that operation for each x there should correspond a y. If this transformation is symbolically indicated by T, we may write $T: X \to Y$. This means a transformation T operates on X and gives Y; or the result of the operation of T on X is Y. It may be observed that there are three elements here (T, X, Y). We may therefore say that in any mathematical operation there are at least three elements:

(*a*) the symbol that operates—*operator* (T)

(*b*) the function that is operated upon—*operand* (X)

(*c*) the function that results as a consequence of this operation—*transformant* (Y)

Example

(i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(ii) $a \times b = c$

In these examples the operators are respectively $\frac{d}{dx}$ and $\times$; the operands are $\sin x$ and a, b; the transformants are $\cos x$ and c.

The process in which one function is transformed into another function is called a *transformation*.

Exercise 1.1

1 If l and m are two intersecting straight lines (*a*) what is $l \cap m$? (*b*) What is $l \cup m$?

2 A coordinate system is set up on a given straight line. What is the distance between the following pairs of points:

2, 4; −4, 3; 3, −5; −4, −7; 3, −3; 3, −7 ?

3 Show that if the distance between any two given points on a given straight line measured in two different coordinate systems is the same constant then the coordinate systems are identical.

1.9 ಪರಿವರ್ತನೆ

X ಮತ್ತು Y ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. $x \in X$, $y \in Y$ ಎಂದಿರಲಿ. X ಗಣವನ್ನು Y ಗಣವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮವಿದ್ದರೆ ಅದರ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಪ್ರತಿ ಒಂದು x ಗೂ ಅನುರೂಪವಾದ ಒಂದು y ಇರಬೇಕು. ಇಂಥ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ T ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $T : X \to Y$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. T ಎಂಬ ಪರಿವರ್ತನೆಯು X ನ ಮೇಲೆ ಪರಿಕರ್ಮಿಸಿ Y ಯನ್ನು ನೀಡುವುದು; ಅಥವಾ X ಮೇಲೆ T ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಪರಿಣಾಮ Y ಎಂದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಾಂಶಗಳು ಮೂರು (T, X, Y) ಎಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಯಾವುದೇ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಮೂರು ಮೂಲಾಂಶಗಳಿವೆ.

(a) ಪರಿಕರ್ಮ ನಡೆಸುವ ಸಂಕೇತ—**ಪರಿಕರ್ಮಿ** (T)

(b) ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ಒಳಪಡುವಂಥ ಉತ್ಪನ್ನ—**ಪರಿಕರ್ಮಿತ** (X)

(c) ಪರಿಕರ್ಮದ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ದೊರೆತ ಉತ್ಪನ್ನ—**ಪರಿವರ್ತಿತ** (Y)

ಉದಾಹರಣೆ (i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(ii) $a \times b = c$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಕರ್ಮಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{d}{dx}$ ಮತ್ತು $\times$; ಪರಿಕರ್ಮಿತಗಳು $\sin x$ ಮತ್ತು a, b; ಪರಿವರ್ತಿತಗಳು $\cos x$ ಮತ್ತು c.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಇನ್ನೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡುವ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಪರಿವರ್ತನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1 l ಮತ್ತು m ಗಳು ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದರೆ $l \cap m$ ಏನು? $l \cup m$ ಏನು?

2 ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದು ಯುಗ್ಮಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು:

$2, 4;\ -4, 3;\ 3, -5;\ -4, -7;\ 3, -3;\ 3, -7$?

3 ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆದಾಗ, ಒಂದೇ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ, ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಸರ್ವ ಸಮವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 Show that of any three given points on a given straight line one and only one point lies between the other two.

5 Given $\mathbf{B}(ABC)$, $\mathbf{B}(BCD)$ to be true prove the following:

(*a*) $\mathbf{B}(CBA)$ is true.

(*b*) $\mathbf{B}(ABD)$ and $\mathbf{B}(ACD)$ are true.

6 If four collinear points A_1, A_2, A_3, A_4 are denoted in such a way that $\mathbf{B}(A_i A_j A_k)$ is true prove that $i < j < k$ or $i > j > k$.

7 Find the transformant of the equation

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 29 = 0$$

by the transformation equations $x = X - 1$ and $y = Y + 2$. Show that in this transformation for every x, y there is a unique X, Y and that the distance between any two points in the xy-system is equal to the distance between the corresponding points in the XY-system.

8 Find the transformant of the equation

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 44x + 108y - 124 = 0$$

by the transformation equations $5x = -(4X + 3Y)$ and $5y = 3X - 4Y$. Show that in this transformation also the distance between any two points in the two systems remains the same.

1.10 Mapping

Consider the relationship $y = f(x)$. Here y is a one-valued function of x. That is, for every value of x there is one and only one corresponding value of y. The converse of this statement need not be valid, *i.e.*, a value of y may have more than one value of x corresponding to it. What is the significance of the symbol f used in this relationship?

$y = f(x)$ is the abbreviated and symbolic form of some relationship that is existing between y and x. f contains this

4 ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಉಳಿದೆರಡರ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5 B(ABC), B(BCD) ಇವು ನಿಜವೆಂದು ದತ್ತವಾದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ:

(*a*) B(CBA) ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(*b*) B(ABD) ಮತ್ತು B(ACD) ನಿಜವಾಗಿದೆ.

6 A_1, A_2, A_3, A_4 ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $B(A_i A_j A_k)$ ನಿಜವಾಗಿರುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆಗ $i<j<k$ ಅಥವಾ $i>j>k$ ನಿಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7 $x = X - 1$, $y = Y + 2$ ಎಂಬ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಲಭಿಸುವ $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 29 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿವರ್ತಿತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಒಂದು x, y ಗೂ ದೊರೆಯುವ X, Y ಏಕೈಕವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ xy- ಮತ್ತು XY-ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

8 $5x = -(4X + 3Y)$, $5y = 3X - 4Y$ ಎಂಬ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಲಭಿಸುವ $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 44x - 108y - 124 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿವರ್ತಿತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ಸಹ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಎರಡು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

1.10 ಚಿತ್ರಣ

ಬೀಜಗಣಿತದ $y = f(x)$ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ y, x ನ ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ ದೊರೆಯುವ y ಯ ಬೆಲೆಯು ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮ ಸಾಧುವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ y ಯ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ x ಗೆ ಹಲವಾರು ಬೆಲೆಗಳಿರಬಹುದು. ಈ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಸಂಕೇತದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವೇನು?

y ಮತ್ತು x ಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸಂಬಂಧದ ಸಂಕ್ಷೇಪ ಮತ್ತು ಸಾಂಕೇತಿಕ ರೂಪ $y = f(x)$. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವ ಗುಣ f ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ

abbreviating property. Therefore two different expressions $ax^2 + bx + c$ and $\sin x + e^x$ are written $f(x)$, $\phi(x)$, (f, ϕ are different symbols) and not both $f(x)$ or $\phi(x)$. We may therefore say that in the relationship $y = f(x)$, f is the symbol for transforming x into y. This transformation is called a *mapping*: *y is the mapping of x by* f. In $y = \sin x$, the mapping of x by *sine* is y. We also say that in the relationship $y = f(x)$ the *image* of x with respect to f is y. Mapping is symbolically written (§ 1.9)

$$T:\ X \to Y$$

The meaning of this symbolic statement is as follows: There is a transformation T; the mapping of X *into* Y is with respect to this transformation T.

There are three distinct types of mapping.

(1) *Injective mapping or mapping* into. T is an *injective mapping* or mapping of X *into* Y if all elements of Y are not involved in the relationship $T:\ X \to Y$, *i.e.*, there is at least one element of Y which is not the image of any element of X.

Example

X is the set of real numbers. Y is the interval $(-2, 2)$. T is defined by $y = \sin x$ where $x \in X$ and $y \in Y$. We know that $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Hence there are elements of Y which are not equal to $\sin x$. (As an exercise the student may identify these values of Y). Hence $T:\ X \to Y$ is in this case a mapping of X *into* Y (or an *injective* mapping).

(2) *A surjective mapping or mapping* onto. In this case *every* element of Y is the image of some member of X. The mapping covers the entire set Y.

ಅಡಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ax^2+bx+c ಮತ್ತು $\sin x+e^x$ ಎನ್ನುವ x ನ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು $f(x)$, $\phi(x)$, (f, ϕ ಭಿನ್ನ ಸಂಕೇತಗಳು) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆಯೇ ವಿನಾ ಎರಡನ್ನೂ $f(x)$ ಅಥವಾ $\phi(x)$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $y=f(x)$ ನಲ್ಲಿ x ನ್ನು y ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಯ ಸಂಕೇತ f ಎಂದು ಈಗ ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು **ಚಿತ್ರಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. f **ನಿಂದ** x **ನ ಚಿತ್ರಣವು** y **ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.** $y=\sin x$ ನಲ್ಲಿ **sine** ನಿಂದ x ನ ಚಿತ್ರಣವು y ಆಗಿದೆ. $y=f(x)$ ಎನ್ನುವಲ್ಲಿ f ನ್ನು ಕುರಿತು x ನ **ಪ್ರತಿಬಿಂಬ** y ಎಂದೂ ಹೇಳುವುದಿದೆ. ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ (§1.9)

$$T: X \to Y$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸಾಂಕೇತಿಕ ನಿರೂಪಣೆಯ ಅರ್ಥವಿಷ್ಟು: T ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯಿದೆ; ಈ T ಯನ್ನು ಕುರಿತು X, Y ಯ **ಒಳಗೆ** ಚಿತ್ರಣಗೊಳ್ಳುವುದು.

ಚಿತ್ರಣದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸ್ಪಷ್ಟ ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ.

(1) ಇಂಜೆಕ್ಟಿವ್ ಚಿತ್ರಣ ಅಥವಾ ಒಳಗಿನ ಚಿತ್ರಣ. $T: X \to Y$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ Y ಯ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶಗಳೂ ಒಳಪಡದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಇಂಜೆಕ್ಟಿವ್ ಚಿತ್ರಣ ಅಥವಾ Y **ಒಳಗಿನ** X ನ ಚಿತ್ರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, X ನ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿರದ Y ಯ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಾದರೂ (ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ) ಇದ್ದೇ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: X ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ. Y ಯು $(-2, 2)$ ಅಂತರ. T ಯನ್ನು $y=\sin x$, $x \in X$, $y \in Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. $-1 \leq \sin x \leq 1$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sin x$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರದ Y ಯ ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. (ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ Y ಯ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗುರುತಿಸಬಹುದು). ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $T: X \to Y$ ಸಂಬಂಧವು Y **ಒಳಗಿನ** X ನ ಚಿತ್ರಣವಾಗಿದೆ (ಅಥವಾ ಒಂದು **ಇಂಜೆಕ್ಟಿವ್** ಚಿತ್ರಣ).

(2) ಸರ್ಜೆಕ್ಟಿವ್ ಚಿತ್ರಣ ಅಥವಾ ಮೇಲಣ ಚಿತ್ರಣ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ Y ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ X ನ ಒಂದು ಗಣಾಂಶದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ. ಈ ಚಿತ್ರಣವು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ Y ಗಣವನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುವುದು.

Example

X is the set of real numbers. Y is the interval $(-1, 1)$. T is defined by $y = \sin x$. $x \in X$. $y \in Y$. The reader can verify that every element of Y is the image of some element of X.

If we denote by $T(X)$ the set of all values for $x \in X$ then the mapping is *onto* if $T(X) = Y$. If $T(X) \subset Y$ and $T(X) \neq Y$ then the mapping is *into*.

(3) *A bijective or one-one onto mapping*. In this case the mapping is *onto* and each value of y is the image of *one and only one* value of x. In other words $T(x_1) = T(x_2)$ implies $x_1 = x_2$.

Example

X is the set of real numbers. Y is the set of real numbers. T is defined by the equation $y = 4x + 5$. The student should verify that this is a $(1, 1)$ mapping.

$$4x_1 + 5 = 4x_2 + 5 \rightarrow x_1 = x_2$$

Again, when T stands for *sine*, the relationship $y = \sin x$ can be written

$$\text{sine}: \quad x \rightarrow y$$

Its meaning: there is a transformation *sine*: the mapping of x into y is with respect to this transformation *sine*.

Let X and Y be any two sets. When we say that f is the mapping of X into Y or symbolically write f: $X \rightarrow Y$ the implied concept is as follows. Let $x \in X$, $y \in Y$; f is the *rule* that prescribes one and only one value of y for every value of x. Here $y = f(x)$. For $x \in X$ there is one and only one value of y $(y \in Y)$. There need not be one and only one value of x for $y \in Y$. (*Example*: $y = \sin x$, $y = ax^2 + bx + c$). In the special case where the converse relation also holds good (*e.g.*, as in $y = 4x + 5$) we say there

ಉದಾಹರಣೆ: X ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ. Y ಯು (−1, 1) ಅಂತರವಾಗಿದೆ. T ಯನ್ನು $x \in X$, $y \in Y$ ಆಗಿರುವಂತೆ $y = \sin x$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. Y ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ X ನ ಒಂದು ಗಣಾಂಶದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

$x \in X$ ಆಗಿರುವಾಗ ದೊರೆಯುವ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳ ಗಣವನ್ನು $T(X)$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, $T(X) = Y$ ಆಗಿರುವಾಗ ಅದು **ಮೇಲಣ** ಚಿತ್ರಣವಾಗುವುದು. $T(X) \subset Y$ ಮತ್ತು $T(X) \neq Y$ ಆಗಿರುವಾಗ ಅದು **ಒಳಗಿನ ಚಿತ್ರಣವಾಗುವುದು.**

(3) ಬೈಜೆಕ್ಟಿವ್ ಅಥವಾ ಒಂದು-ಒಂದು ಮೇಲಣ ಚಿತ್ರಣ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಣವು **ಮೇಲಣ** ಚಿತ್ರಣವಾಗಿದೆ; ಇಲ್ಲಿ y ಯು ಬೆಲೆಯು x ನ **ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ** ಬೆಲೆಯ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $T(x_1) = T(x_2)$ ನಿಂದ $x_1 = x_2$ ಎಂಬುದು ನಿಬಂಧಿತವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: X ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಗಣ. Y ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಗಣ. T ಯನ್ನು $y = 4x + 5$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಒಂದು (1, 1) ಚಿತ್ರಣವಾಗಿದೆಯೆಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

$$4x_1 + 5 = 4x_2 + 5 \rightarrow x_1 = x_2$$

ಪುನಃ, T ಯು **sine** ನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುವಾಗ $y = \sin x$ ಸಂಬಂಧವನ್ನು

$$\text{sine}: x \rightarrow y$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರ ಅರ್ಥವಿಷ್ಟು: **sine** ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯಿದೆ; ಈ **sine** ನ್ನು ಕುರಿತು x, y ಆಗಿ ಚಿತ್ರಣಗೊಳ್ಳುವುದು.

X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. f ಎನ್ನುವುದು Y ಒಳಗಿನ X ನ ಚಿತ್ರಣ ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ ಅಥವಾ

$$f: X \rightarrow Y$$

ಎಂದು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಭಾವನೆ ಇಷ್ಟು: $x \in X$, $y \in Y$ ಆಗಿರಲಿ: ಪ್ರತಿಯೊಂದು x ಗೂ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ y ಯನ್ನು ನಿಗದಿಗೊಳಿಸುವ **ನಿಯಮ** f ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $y = f(x)$. ಪ್ರತಿಯೊಂದು x ಗೂ ($x \in X$) ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ y ($y \in Y$) ಇದೆ. ಈಗ, ಇದೇ ರೀತಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು y ಗೂ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ x ಇರಲೇಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. (ಉದಾಹರಣೆ: $y = \sin x$, $y = ax^2 + bx + c$).

is a (1, 1) correspondence between X and Y and we write it $X \leftrightarrow Y$.

1.11 Halfplanes

Postulate 4. Given a line l and a plane p containing it. The points of the plane that do not lie on the line form two convex sets

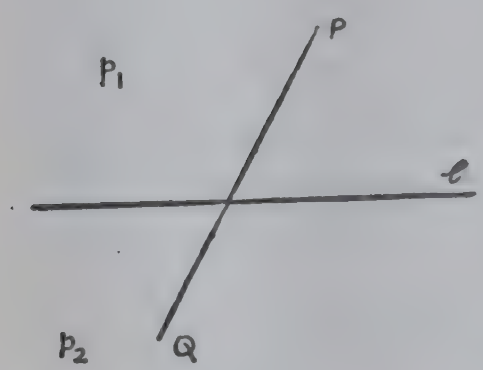


Fig. 1.6

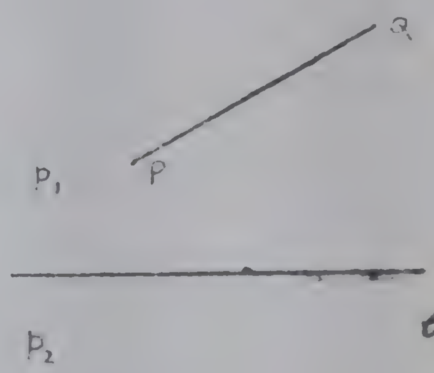


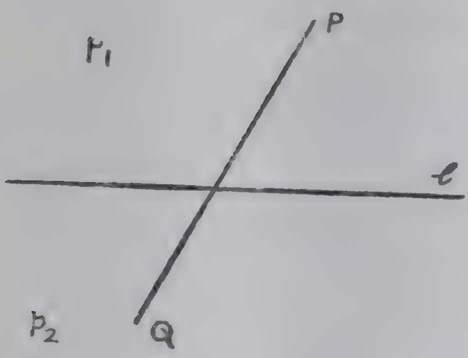
Fig. 1.7

such that if P is on one set and Q is on the other, the segment $\overline{PQ}$ intersects l (Fig. 1.6). The two sets into which l separates p are called *halfplanes*. p_1 and p_2 are the halfplanes of p. Therefore $p_1 \cup p_2 = p$. If P and Q lie on the same halfplane (Fig. 1.7) they are said to be on the *same side* of l. In this case the segment $\overline{PQ}$ does not intersect l. If P and Q lie on different half-planes then $\overline{PQ}$ intersects l (Fig. 1.6) and we say that P and Q lie on opposite sides of l. This is called the *plane separation postulate.* l is the *edge* of either of the halfplanes p_1, p_2. $p_1 \cap p_2 = l$.

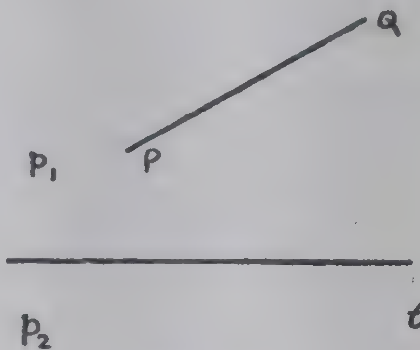
ವಿಲೋಮ ಸಂಬಂಧವೂ ನಿಜವಾಗಿರುವ ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ X, Y ಗಳಲ್ಲಿ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಉದಾಹರಣೆ $y = 4x + 5$). ಇದನ್ನು $X \leftrightarrow Y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.11 ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳು

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 4. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ l ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮತಲ p ದತ್ತವಾಗಿವೆ. l ನ ಮೇಲೆ ಇರದ p ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಎರಡು ಉಬ್ಬು



ಚಿತ್ರ 1.6



ಚಿತ್ರ 1.7

ಗಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. P ಬಿಂದುವು ಇಂಥ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿಯೂ, Q ಬಿಂದುವು ಇನ್ನೊಂದು ಗಣದಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದರೆ $\overline{PQ}$ ರೇಖಾಖಂಡವು l ನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 1.6). l ನಿಂದ ಹೀಗೆ ವಿಭಾಗಗೊಂಡ p ಯ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, p_1 ಮತ್ತು p_2, p–ಸಮತಲದ ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳು. $p_1 \cup p_2 = p$. P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಒಂದೇ ಅರ್ಧಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ (ಚಿತ್ರ 1.7) ಅವು l ನ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\overline{PQ}$ ರೇಖಾಖಂಡವು l ನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ (ಚಿತ್ರ 1.6) ಆಗ $\overline{PQ}$ ರೇಖಾಖಂಡವು l ನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ P, Q ಗಳು l ನ ವಿರೋಧ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು **ಸಮತಲ ಬೇರ್ಪಡೆಯ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ**ವೆಂದು ಕರೆಯುವುದಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಅರ್ಧಸಮತಲ p_1 ಮತ್ತು p_2 ರ **ಅಂಚು** l. $p_1 \cap p_2 = l$.

1.12 Angle

An *angle* is the union of two rays which have the same endpoint but do not lie in the same line. The two rays are called the *sides* of the angle and the common endpoint is called the *vertex*. The angle which is the union of $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ is denoted by $\angle BAC$ or by $\angle CAB$ or simply by $\angle A$ if it is clear as to which rays are meant.

Let $\angle BAC$ be an angle lying in the plane p. Let P be any point of p. If the position of P be such that (i) P and B are on the same side of the ray $\overrightarrow{AC}$ and (ii) P and C are on the same side of the ray $\overrightarrow{AB}$ then P is said to lie in the *interior* of the angle BAC. The *exterior* of the angle BAC is the set of all points of P that do not lie in the interior and do not lie on the angle itself.

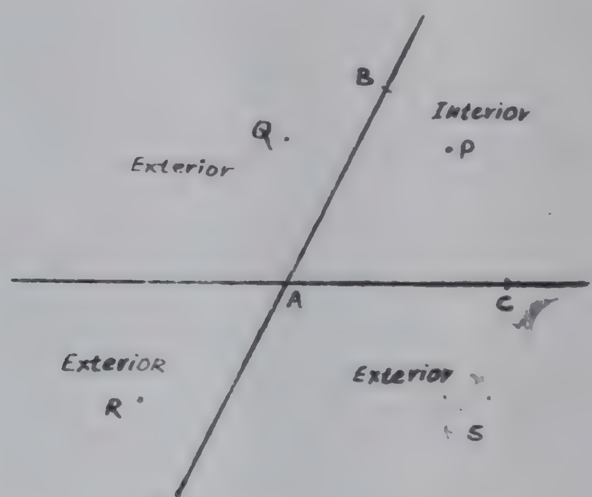


Fig. 1.8

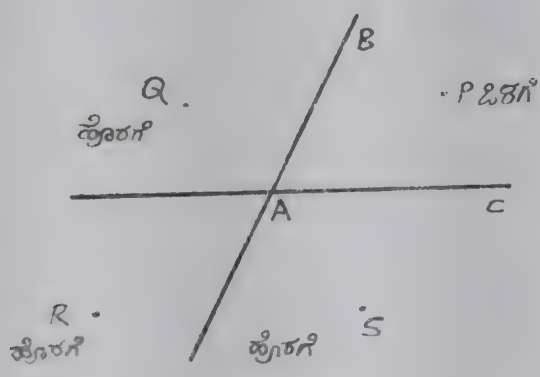
1.13 Measurement of an angle

***Postulate* 5.** To every angle BAC there corresponds a real number between 0 and 180. This is called the *angle measurement postulate*. The number specified by this postulate is called the *measure of the angle* and written $m\angle BAC$. If the number is r we say $m\angle BAC = r°$ (r degrees).

1.12 ಕೋನ

ಕೊನೆಬಿಂದು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದು, ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರದಿರುವ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು **ಕೋನ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವೆರಡು ಕಿರಣಗಳು ಕೋನದ **ಬಾಹುಗಳು.** ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೊನೆಬಿಂದು ಕೋನದ **ಶೃಂಗ.** $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AC}$ ಕಿರಣಗಳ ಸಂಯೋಗದಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಕೋನವನ್ನು $\angle BAC$ ಅಥವಾ $\angle CAB$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ; ಸಂದರ್ಭವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುವಾಗ ಇದನ್ನು $\angle A$ ಎಂದು ಸರಳವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದೂ ಇದೆ.

$\angle BAC$ ಯು p ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕೋನವಾಗಿರಲಿ. P ಯು p ಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಈಗ (i) P ಮತ್ತು B ಗಳು $\overrightarrow{AC}$ ಕಿರಣದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿಯೂ, (ii) P ಮತ್ತು C ಗಳು $\overrightarrow{AB}$ ಕಿರಣದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದರೆ ಆಗ P ಯು $\angle BAC$ ಯ **ಒಳಗೆ** ಇದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕೋನದ ಮೇಲೆಯೂ, ಕೋನದ ಒಳಗೂ ಇಲ್ಲದಿರುವ p ಯ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವನ್ನೂ ಕೋನದ **ಹೊರಗೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.8

1.13 ಕೋನದ ಅಳತೆ (ಕೋನಮಾನ)

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 5. $\angle BAC$ ಎಂಬ ಪ್ರತಿ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೂ ಹೊಂದುವಂತೆ 0 ಮತ್ತು 180 ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅನುರೂಪ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. ಇದನ್ನು **ಕೋನಮಾನದ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಕೋನದ ಅಳತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $m\angle BAC$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ r ಆಗಿದ್ದರೆ $m\angle BAC = r$ (r ಡಿಗ್ರಿಗಳು) ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

***Postulate* 6.** Let $\overrightarrow{AB}$ be a ray on the edge of the halfplane p_1. For every number r between 0 and 180 there is exactly one ray $\overrightarrow{AP}$ with P in p_1 such that $m \angle PAB = r$. This is called the *angle construction postulate.*

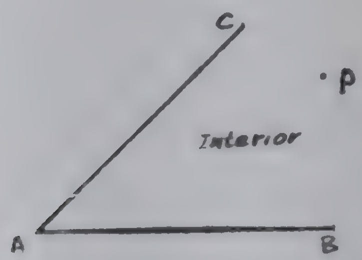


Fig. 1.8 (*a*)

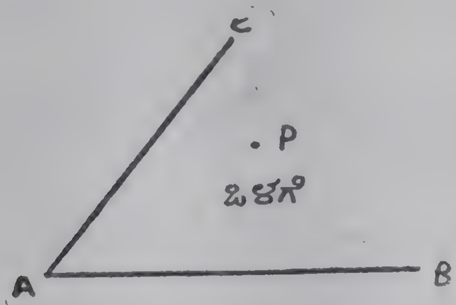
***Postulate* 7.** If P is a point in the interior of $\angle BAC$ then $m \angle BAC = m \angle BAP + m \angle PAC$. This is called the *angle addition postulate.*

1.14 Triangle

If A, B, C are any three noncollinear points then the union of the segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ is called a *triangle* and is denoted by $\triangle ABC$. $\triangle ABC = \overline{BC} \cup \overline{CA} \cup \overline{AB}$. The points A, B, C are called its *vertices* and the segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ are called its *sides.* Every triangle determines three angles: $\triangle ABC$ determines $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$.

An alternative definition for a triangle can be given as follows. A, B, C are any three noncollinear points in the plane p. The segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ divide it into six halfplanes. Let p_1

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 6. $\overrightarrow{AB}$ ಕಿರಣವು p_1 ಅರ್ಧಸಮತಲದ ಅಂಚಿನಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ 0 ಮತ್ತು 180 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆ r ಗೂ ಹೊಂದುವಂತೆ $\overrightarrow{AP}$ ಎಂಬ ಒಂದೇ ಕಿರಣವಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ P ಯು p_1 ರಲ್ಲಿ ಇರುವುದು ಮತ್ತು $m\angle PAB = r$. ಇದನ್ನು ಕೋನ ರಚನೆಯ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.8 (*a*)

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 7. P ಯು $\angle BAC$ ಯ ಒಳಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $m\angle BAC = m\angle BAP + m\angle PAC$. ಇದನ್ನು **ಕೋನ ಸಂಕಲನ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.14 ತ್ರಿಕೋನ

A, B, C ಗಳು ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು ಒಂದು **ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\triangle ABC$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. A, B, C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದೂ, $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಅದರ **ಬಾಹುಗಳೆಂದೂ** ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $\triangle ABC = \overline{BC} \cup \overline{CA} \cup \overline{AB}$. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವೂ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು; $\triangle ABC$ ಯು $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ ಎಂಬ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು.

ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. A, B, C ಗಳು p ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳು. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು, p ಸಮತಲವನ್ನು ಆರು ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುವು. $\overleftrightarrow{BC}$ ಯು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳಲ್ಲಿ

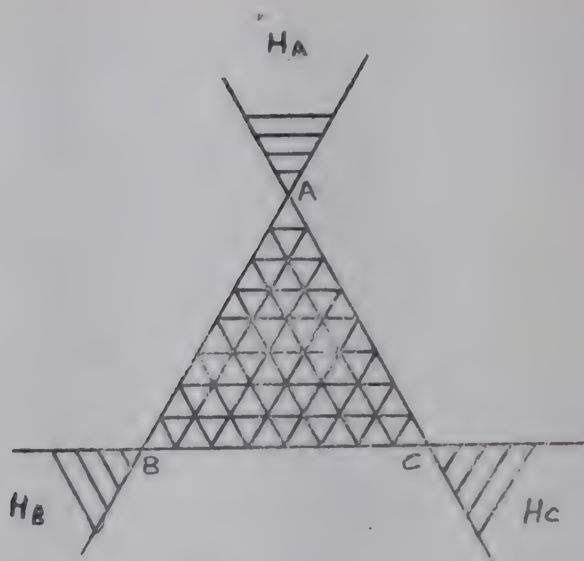


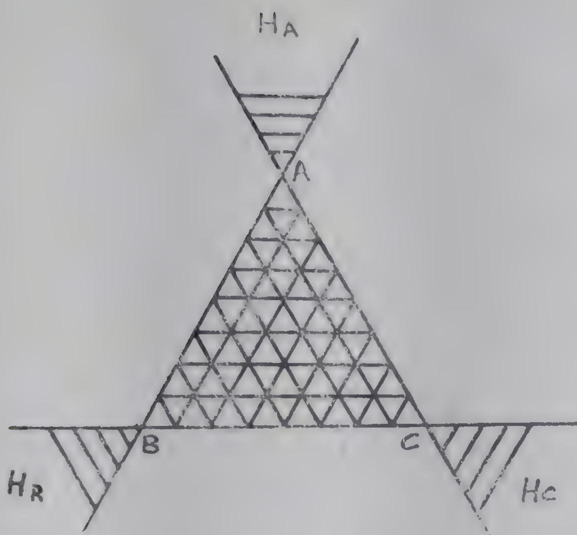
Fig. 1.9

denote the halfplane determined by $\overleftrightarrow{BC}$ and containing A; similarly p_B and p_C denote the halfplanes determined by $\overleftrightarrow{CA}$ and $\overleftrightarrow{AB}$ and containing B and C respectively. The common part of these halfplanes p_A, p_B, p_C is called the triangle ABC. Therefore $\triangle ABC = p_A \cap p_B \cap p_C$.

1.15 Congruence

We say two straight lines of equal lengths are congruent: two angles of the same measure are congruent; two triangles with congruent sides are congruent; two circles of equal radii are congruent; and so on. The basic idea underlying these assertions is that in each case one figure can be moved in a suitable way and brought into complete coincidence with the other figure.

Before we state the axioms of congruence we shall introduce the *equidistance relationship* between a set of points. Here we deal with points lying in a given plane p. The formula **E** $(A, B; C, D)$ is to be read as follows: *The point* A *is just as far from the point* B *as the point* C *is from* D; or $d(A, B) = d(C, D)$



ಚಿತ್ರ 1.9

A ಬಿಂದುವಿರುವ ಭಾಗವು p_A ಎಂದಿರಲಿ; ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ $\overleftrightarrow{CA}$ ಮತ್ತು $\overleftrightarrow{AB}$ ಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಮತ್ತು B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ p_B ಮತ್ತು p_C ಎಂದಿರಲಿ. p_A, p_B, p_C ಎಂಬ ಈ ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಗವನ್ನು $\triangle ABC$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\triangle ABC = p_A \cap p_B \cap p_C$$

1.15 ಸರ್ವಸಮತ್ವ

ಸಮಾನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ; ಸಮಾನ ಒಂದೇ ಅಳತೆ ಇರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ; ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ—ಎಂದು ಮುಂತಾಗಿ ನಾವು ಹೇಳುವುದಿದೆ. ಈ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಮೂಲ ಭಾವನೆ ಹೀಗಿದೆ—ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಅನುಕೂಲವಾದ ಒಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಕೃತಿಯೊಡನೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಎರಕಗೊಳ್ಳುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು.

ಸರ್ವಸಮತ್ವದ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಳುವ ಮೊದಲು ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ **ಸಮಾನ ದೂರ ಸಂಬಂಧ**ವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿ p ಎಂಬ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. E(A, B; C, D) ಸೂತ್ರವನ್ನು ಓದುವ ಕ್ರಮ ಹೀಗಿದೆ: **C ಬಿಂದುವು D ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ A ಬಿಂದುವು B ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇದೆ;** ಅಥವಾ $d(A, B) = d(C, D)$.

Postulate 8. If E $(A, A; C, D)$ then $C = D$.

Postulate 9. E $(A, B; B, A)$ is true.

Postulate 10. If E $(A, B; C, D)$ and E $(A, B; F, G)$ then E $(C, D; F, G)$ is true.

The student can draw convenient figures and grasp the full significance of the above three postulates.

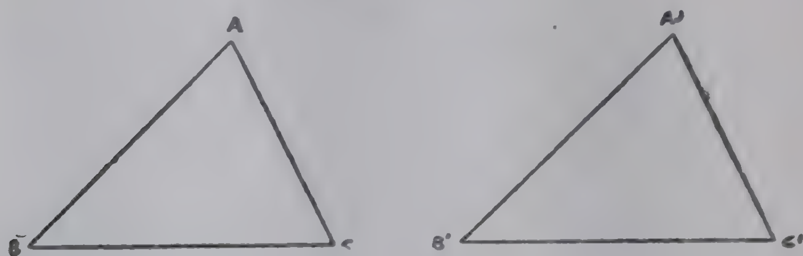


Fig. 1.10

Consider the congruence of two triangles ABC, $A'B'C'$. Here $d(A, B) = d(A', B')$; $d(B, C) = d(B', C')$ and $d(C, A) = d(C', A')$. Further $m\angle A = m\angle A'$; $m\angle B = m\angle B'$ and $m\angle C = m\angle C'$. In this basic idea of congruence we note that there is a (1, 1) correspondence between the vertices, *viz.*, $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ and also the distances between corresponding vertices are preserved. In Fig. 1.10 $A \leftrightarrow B'$, $B \leftrightarrow C'$, $C \leftrightarrow A'$ is also a (1, 1) correspondence; but the distances are not preserved, *viz.*, $d(A, B) \neq d(B', C')$, $d(B, C) \neq d(C', A')$ and $d(C, A) \neq d(A', B')$. Hence this (1, 1) correspondence does not determine a congruence.

If two geometrical figures F and F' are congruent we write it $F \cong F'$ (read F is congruent to F'). A few examples of congruence may be considered.

(i) If E $(A, B; C, D)$ then $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

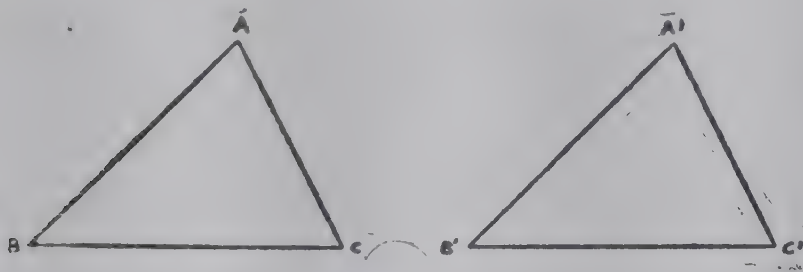
(ii) If $m\angle A = m\angle B$ then $\angle A \cong \angle B$.

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 8. E (A, A ; C, D) ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ C = D.

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 9. E (A, B; B, A) ನಿಜವಾಗಿದೆ.

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 10. E (A, B ; C, D) ಮತ್ತು E (A, B ; F, G) ಆಗಿರುವಾಗ E (C, D ; F, G) ನಿಜವಾಗಿದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸೂಕ್ತ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಮೇಲಿನ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಭಾವಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 1·10

ABC ಮತ್ತು A′B′C′ ಎಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತ್ವವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ d (A, B) = d (A′, B′), d (B, C) = d (B′, C′) ಮತ್ತು d (C, A) = d (C′, A′). ಅಲ್ಲದೇ, $m\ \angle A = m\ \angle A'$, $m\ \angle B = m\ \angle B'$, ಮತ್ತು $m\ \angle C = m\ \angle C'$. ಸರ್ವಸಮತ್ವದ ಈ ಮೂಲಭಾವನೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ, $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿವೆ. ಚಿತ್ರ 1.10 ರಲ್ಲಿ $A \leftrightarrow B'$, $B \leftrightarrow C'$, $C \leftrightarrow A'$ ಇದೂ ಸಹ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯೇ ಆಗಿದೆ; ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, d (A, B) ≠ d (B′, C′), d (B, C) ≠ d (C′, A′), ಮತ್ತು d (C, A) ≠ d (A′, B′). ಆದ್ದರಿಂದ ಈ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯು ಒಂದು ಸರ್ವಸಮತ್ವವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

F ಮತ್ತು F′ ಎಂಬ ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ $F \cong F'$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಓದುವ ಕ್ರಮ: F, F′ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ). ಸರ್ವಸಮತ್ವದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

(i) E (A, B ; C, D) ಆಗಿರುವಾಗ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

(ii) $m\ \angle A = m\ \angle B$ ಆಗಿರುವಾಗ $\angle A \cong \angle B$.

(iii) If in two $\triangle^s ABC$ and DEF

(*a*) all sides are congruent; or

(*b*) two corresponding sides and the included angles are congruent; or

(*c*) a pair of corresponding sides and the angles at their ends are congruent, then

$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$

(iv) Two circles of equal radii are congruent.

(v) In the same circle (or in two congruent circles) arcs subtending congruent angles at the centre are congruent.

It is now possible to understand that *congruence is a transformation.* If figures F and F' are congruent ($F \cong F'$) we may write it symbolically

$T: F \rightarrow F'$

where T indicates the congruence.

Worked-out Examples

1 If two sides of a triangle are congruent then show that the angles opposite to these sides are congruent.

Proof

Given $\triangle ABC$ with $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. It is required to prove that $\angle C \cong \angle B$. Since $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ we have $\overline{AC} \cong \overline{AB}$; and the included angles $\angle A \cong \angle A$.

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle BCA$

$\therefore \quad \angle B \cong \angle C$

2 If in two given triangles two angles and the included side of the first triangle are congruent to the corresponding elements of the second triangle prove that the two triangles are congruent.

Proof

Given $\triangle^s$ ABC and DEF with $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ and $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. It is required to prove that $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(iii) ABC ಮತ್ತು DEF ಎಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

(*a*) ಎಲ್ಲ ಬಾಹುಗಳೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ; ಅಥವಾ

(*b*) ಎರಡು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳೂ ಅವು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ; ಅಥವಾ

(*c*) ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳೂ ಅವುಗಳ ಕೊನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(iv) ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

(v) ಒಂದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕಂಸಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

ಸರ್ವಸಮತ್ವವು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ ಎಂದು ಈಗ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. F ಮತ್ತು F′ ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ($F \cong F'$) ಅದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $T: F \to F'$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ T ಯು ಸರ್ವಸಮತ್ವವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಸಾಧಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಬಾಹುಗಳ ಎದುರು ಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ದತ್ತ. $\angle C \cong \angle B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$; ಮತ್ತು ಇವು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೋನಗಳು $\angle A \cong \angle A$.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BCA$

$\therefore \angle B \cong \angle C$

2 ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಬಾಹು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದರ ಇವೇ ಮೂಲಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಕೋನಗಳು ದತ್ತವಾಗಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ ಮತ್ತು $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. $\overrightarrow{ED}$ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $d(E, D') = d(B, A)$

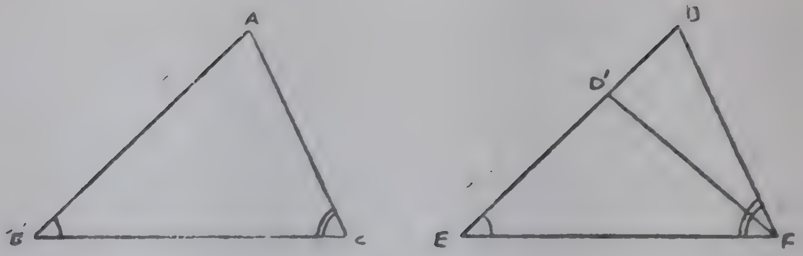


Fig. 1.11

On the ray $\overrightarrow{ED}$ mark D' such that $d(E, D') = d(B, A)$. Now $d(B, C) = d(E, F)$ and $\angle B \cong \angle E$ (given). Therefore $\triangle ABC \cong \triangle D'EF$.

$$\therefore \quad \angle BCA \cong \angle EFD'$$

But

$$\angle BCA \cong \angle EFD \text{ (given)}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{FD}$ and $\overrightarrow{FD'}$ are the same ray.

$\therefore$ $D = D'$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

3 $X = \{x \mid x$ a real number$\}$, $Y = \{y \mid y$ a real number$\}$. T is defined by $y = \sec x$. Examine the nature of this mapping

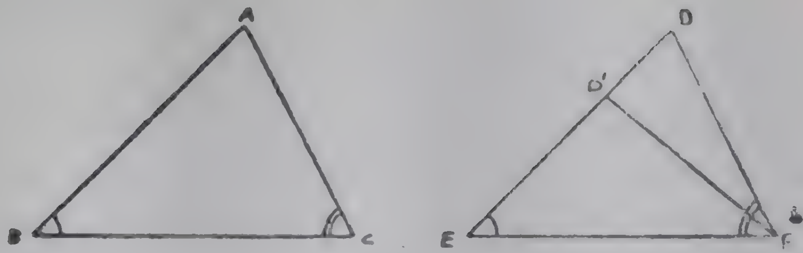
Proof

$\sec x \geqslant 1$ and $\sec x \leqslant -1$. Therefore $\sec x$ does not take any value in the interval $(-1, 1)$. There is therefore at least one element of Y which is not the image of any element of X. Hence this is an injective mapping or mapping *into*.

4 If $\mathrm{E}(A, B;\ C, D)$ then prove that $\mathrm{E}(C, D;\ A, B)$.

Proof

By postulate 9, $\mathrm{E}(A, B; B, A)$ is true. $\therefore$ $\mathrm{E}(A, B; B, A)$ and $\mathrm{E}(A, B;\ B, A)$ are true. By postulate 10, $\mathrm{E}(B, A;\ B, A)$



ಚಿತ್ರ 1.11

ಆಗಿರುವಂತೆ D' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಈಗ $d(B, C) = d(E, F)$ ಮತ್ತು $\angle B \cong \angle E$ (ದತ್ತ). ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle ABC \cong \triangle D'EF$.

$\therefore \angle BCA \cong \angle EFD'$. ಆದರೆ $\angle BCA \cong \angle EFD$ (ದತ್ತ).

$\therefore \overrightarrow{FD}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{FD'}$ ಒಂದೇ ಕಿರಣವಾಗಿದೆ.

$\therefore D = D'$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$

3 $X = \{x \mid x$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

$Y = \{y \mid y$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

T ಯನ್ನು $y = \sec x$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಚಿತ್ರಣದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ $\sec x \geqslant 1$, ಮತ್ತು $\sec x \leqslant -1$. ಆದ್ದರಿಂದ $\sec x$, $(-1, 1)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಪಡೆಯುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ X ನ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವೂ ಆಗಿರದಿರುವ Y ಯ (ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ) ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಾದರೂ ಇಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಇಂಜೆಕ್ಟಿವ್ ಚಿತ್ರಣ ಅಥವಾ ಒಳಗಿನ ಚಿತ್ರಣ.

4 E (A, B; C, D) ಆಗಿರುವಾಗ E (C, D; A, B) ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 9 ರಿಂದ E(A, B ; B, A) ನಿಜವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ E (A, B ; B, A), ಮತ್ತು E (A, B ; B,A) ನಿಜವಾಗಿವೆ.

ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 10 ರಿಂದ E (B, A ; B, A) ನಿಜವಾಗಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ (ಸೂತ್ರದ ಮೇಲೆ ಇದರಿಂದ ಯಾವ ಪರಿಣಾಮವೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ) E (A, B ; A, B) ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. E (A, B ; C, D) ನಿಜವೆಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆ. E (A, B ; A, B)

is true. Interchanging the points A and B (which does not affect the formula) we have E $(A, B; A, B)$ is true.

Given E $(A, B; C, D)$ true. Since E $(A, B; A, B)$ is true (proved) by postulate 10, E $(C, D; A, B)$ is true.

Exercise 1.2

1 If two figures are each congruent to a third figure are they congruent to each other?

2 Can a triangle be congruent to a square? Why?

3 Are two adjacent faces of a cube congruent?

4 Prove that every equilateral triangle is equiangular

5 If in two given triangles all three pairs of corresponding sides are congruent prove that the triangles are congruent.

6 Prove that the bisector of the vertex angle of an isosceles triangle is the perpendicular bisector of the base.

7 If E $(A, B; C, D)$ and E $(C, D; P, Q)$ are true show that E $(A, B; P, Q)$ is true.

8 Examine the nature of the mapping T defined by $y = x^2 - 3x + 2$ where $X = \{x \mid x = 1, 2, 3, 4\}$ and $Y = \{y \mid y = 0, 1, 2, 6\}$.

9 Examine the nature of the mapping T defined by

$$y = \sqrt{3x + 2}$$

where

$$X = \{x \mid x = 0, 1, 2, 3\}, \quad Y = \{y \mid y \text{ a real number}\}.$$

10 Examine the nature of the mapping T defined by

$$y = 3x - 1$$

where

$$X = \{x \mid x \text{ a real number}\}$$
$$Y = \{y \mid y \text{ a real number}\}.$$

ನಿಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (ಸಾಧಿತ) ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 10 ರಿಂದ E(C, D; A, B) ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1 ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಮೂರನೆಯ ಒಂದು ಆಕೃತಿಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆಯೇ?

2 ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವೂ ಒಂದು ಚೌಕವೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರಬಹುದೇ? ಏಕೆ?

3 ಒಂದು ಘನದ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಎರಡು ಫಲಕಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುವೇ?

4 ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವೂ ಸಮಕೋನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5 ಎರಡು ದತ್ತ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳೂ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6 ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಪಾದದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7 E(A, B; C, D) ಮತ್ತು E(C. D; P, Q) ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ E(A, B; P, Q) ನಿಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಣದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ:
$y = x^2 - 3x + 2$, T ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದು.
ಇಲ್ಲಿ $X = \{x \mid x = 1,2,3,4\}$ ಮತ್ತು $Y = \{y \mid y = 0,1,2,6\}$.

9 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಣದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ: $y = \sqrt{3x+2}$ T ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $X = \{x \mid x = 0, 1, 2, 3\}$.
$Y = \{y \mid y$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$.

10 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಣದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ: $y = 3x - 1$ T ಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $X = \{x \mid x$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$,
$Y = \{y \mid y$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$.

2 RIGID MOTION

2.1 Motion

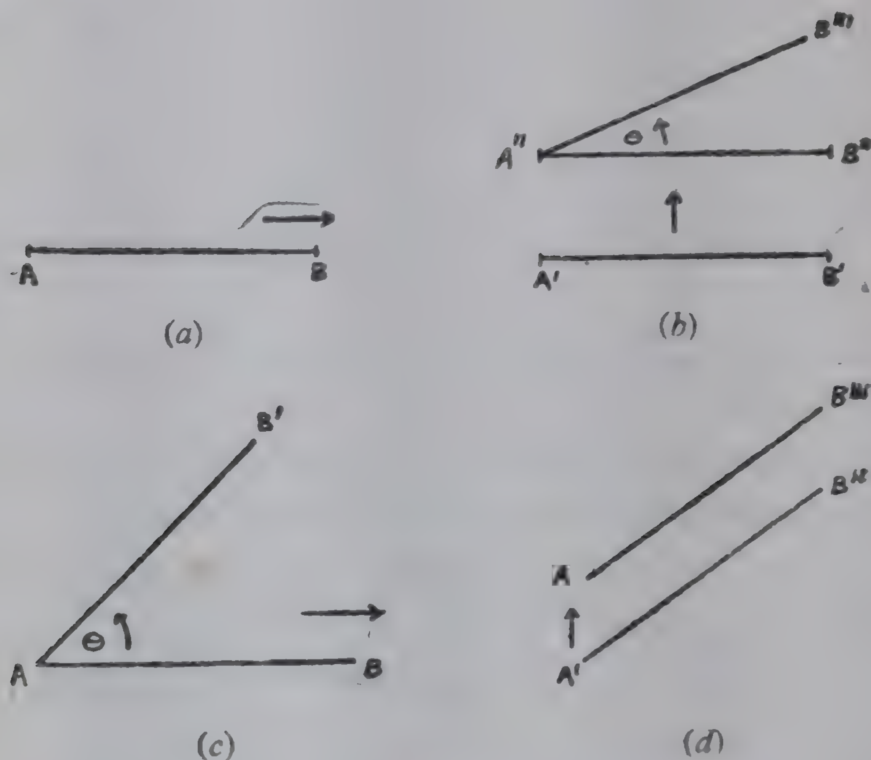


Fig. 2.1

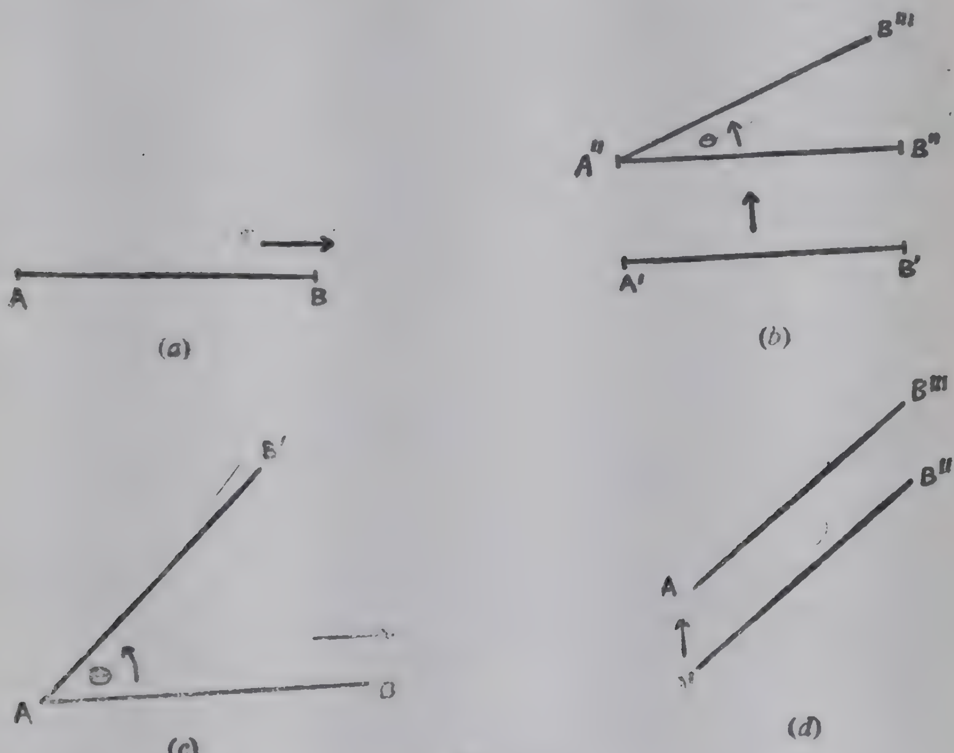
A change in position is called *motion*. When a bird flies or a ball rebounds there is continuous change of position. Therefore we say the bird moves or the ball moves, etc. All motions are confined to two independent types only—*translatory motion* and *rotatory motion*. In figures (a) and (b) $\overline{AB}$ moves to $\overline{A'B'}$ along a straight line. It moves to $\overline{A''B''}$ again along a straight line.

Both these are translatory motions. Finally the straight line rotates about A'' through *and* angle θ and occupies the position $\overline{A''B'''}$. This is rotatory motion. Thus as a result of these two motions—translatory and rotatory—$\overline{AB}$ moves from its original

2 ದೃಢಚಲನೆ

2.1 ಚಲನೆ

ಸ್ಥಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು **ಚಲನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಕ್ಕಿ ಹಾರುತ್ತಿರುವಾಗ, ಚೆಂಡು ಚಿಮ್ಮುತ್ತಿರುವಾಗ ನಿರಂತರವಾಗಿ ಸ್ಥಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತಿರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಹಕ್ಕಿ ಚಲಿಸಿತು, ಚೆಂಡು ಚಲಿಸಿತು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎಲ್ಲ ಚಲನೆಗಳೂ ಕೇವಲ ಎರಡು ಸ್ಪಷ್ಟವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗಿವೆ— **ಸರಳ ಚಲನೆ** ಮತ್ತು **ಆವರ್ತ ಚಲನೆ.**



ಚಿತ್ರ 2.1

(*a*) ಮತ್ತು (*b*) ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\overline{A'B'}$ ಗೆ ಚಲಿಸುವುದು. ಪುನಃ ಅದು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\overline{A''B''}$ ಗೆ ಚಲಿಸುವುದು. ಇವೆರಡೂ ಸರಳ ಚಲನೆಗಳು. ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಅದು A'' ಸುತ್ತಲೂ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ $\overline{A''B'''}$ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದುವುದು. ಹೀಗೆ $\overline{AB}$ ಯು ಸರಳ ಮತ್ತು ಆವರ್ತ ಚಲನೆಗಳ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಅದರ ಮೂಲಸ್ಥಾನದಿಂದ ಅಂತಿಮಸ್ಥಾನ $\overline{A''B'''}$ ಯನ್ನು ತಲಪುವುದು.

position to the final position $\overline{A''B''}$. Figures (*c*) and (*d*) show how an identical end-result can be achieved by effecting rotation first and translations next.

2.2 Rigid bodies

A number of particles put together constitute an object of a body. If the relative positions of the particles in a body are not affected by motion (translation and/or rotation) such a body is called a *rigid body*. In mathematics we take the concept of a body as a set of points. The set of points whose relative positions are not affected by motion—that is, transformation—is called a rigid body. Note that the physical motion is a transformation

2.3 Definition of Rigid Motion

Let F and F' be any two plane figures. Let $\{P\}$ be the set of points on F and $\{P'\}$ on F'. If there is a (1, 1) correspondence between the two sets $\{P\}$ and $\{P'\}$ and if the distance between any two points of F is equal to the distance between the corresponding points of F', then we say there is a *rigid motion* between F and F'. It is symbolically written $F \approx F'$ (read as "F is *isometric* to F'").

Importing the idea of mapping into this definition, we may express it as follows:

"The rigid motion between F and F' is a mapping $f: F \to F'$. Here the symbol (or operator) f indicates a (1, 1) correspondence. Further for any two points P and Q on F and the corresponding points P' and Q' on F', $d(P, Q) = d(P', Q')$." In this case we may also write $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$.

ಇದೇ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಮೊದಲು ಆವರ್ತ ಚಲನೆ ಮತ್ತು ಸರಳ ಚಲನೆಗಳನ್ನು ನೆರವೇರಿಸಿ ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು (c), (d) ಚಿತ್ರಗಳು ತೋರಿಸುವುವು.

2.2 ದೃಢವಸ್ತುಗಳು

ಹಲವಾರು ಕಣಗಳ ಸಮುದಾಯ ಒಂದು ವಸ್ತು. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಕಣಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷಸ್ಥಾನಗಳು ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳದಿದ್ದರೆ ಆ ವಸ್ತುವನ್ನು **ದೃಢವಸ್ತು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕಲ್ಪನೆಯ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಕಣ-ವಸ್ತು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದೇವೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಎನ್ನುವ ಭಾವವು ಹಲವಾರು ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಪೇಕ್ಷಸ್ಥಾನಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳದಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವನ್ನು ಒಂದು ದೃಢವಸ್ತು ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಚಲನೆಯೂ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ದೃಢವಸ್ತುವಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷಸ್ಥಾನಗಳು ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

2.3 ದೃಢಚಲನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

F ಮತ್ತು F′ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳಾಗಿರಲಿ. {P} ಯು F ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ; ಅದೇ ರೀತಿ {P′}, F′ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ. {P} ಮತ್ತು {P′} ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು F ನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ F′ ನ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ F ಮತ್ತು F′ ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಇದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $F \approx F'$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಓದುವ ಕ್ರಮ: F, F′ ಗೆ ಐಸೋಮೆಟ್ರಿಕ್- ಸಮಾನಮಾನ—ಆಗಿದೆ).

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಚಿತ್ರಣದ ಭಾವವನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು: "F ಮತ್ತು F′ ಗಳ ನಡುವಿನ ದೃಢಚಲನೆಯು $f: F \rightarrow F'$ ಎಂಬ ಒಂದು ಚಿತ್ರಣ. ಇಲ್ಲಿ f ಎಂಬ ಸಂಕೇತ (ಅಥವಾ ಪರಿಕರ್ಮಿ) ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಮತ್ತು F ಮೇಲಿರುವ P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮತ್ತು F′ ಮೇಲಿರುವ P′ ಮತ್ತು Q′ ಎಂಬ ಅನುರೂಪಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ $d(P, Q) = d(P', Q')$ ಸಂಬಂಧವಿದೆ." ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ ಎಂದೂ ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

Thus rigid motion is a bijective or one-one *onto* mapping in which distances between corresponding points are preserved

It may be noted that between two sets of points a (1, 1) correspondence may be established without preserving distances between corresponding points. As an example consider Fig. 2.2 where $\overline{AB}$ and $\overline{A'B}$ are two unequal segments. V is any point on the ray $\overrightarrow{A'A}$ produced. Take any two points P and Q on $\overline{AB}$. The rays $\overrightarrow{VP}$ and $\overrightarrow{VQ}$ produced meet $\overline{A'B}$ in P' and Q' respectively. It is clear that this construction establishes a (1 1) correspondence between sets of points of $\overline{AB}$ and $\overline{A'B}$ so that $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$. But $d(P, Q) \neq d(P', Q')$. Therefore this correspondence is not a rigid motion.

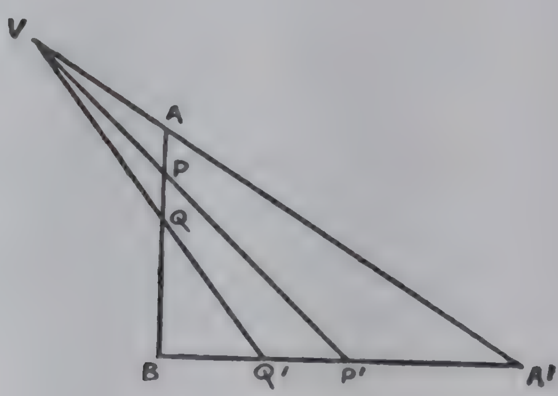
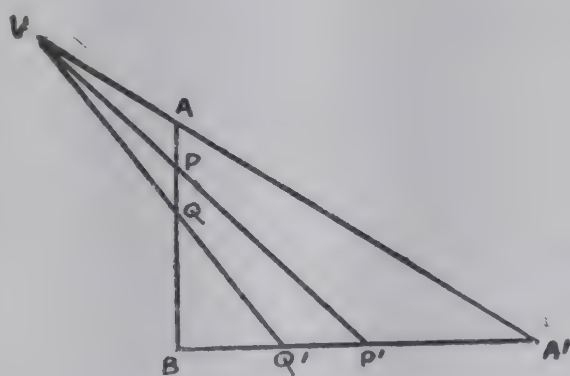


Fig. 2.2

Consider again two unequal segments $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$. Pairs of points P, Q and P', Q' can be so chosen on these segments such that $d(P, Q) = d(P', Q')$. But this property is not applicable to all the points on the two segments. For example we cannot find

ಹೀಗೆ ದೃಢಚಲನೆಯು ಒಂದು ಬೈಜೆಕ್ಟಿವ್ ಅಥವಾ ಒಂದು-ಒಂದು ಮೇಲಣ ಚಿತ್ರಣವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿರುತ್ತವೆ.

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಣಗಳ ನಡುವೆ, ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಗಳು ಉಳಿಯದಿದ್ದಾಗಲೂ, ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಚಿತ್ರ 2.2 ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{A'B}$ ಎರಡು ಅಸಮಾನ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು. V ಯು ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಕಿರಣ $\overrightarrow{A'A}$ ಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು. $\overline{AB}$ ಯ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಕಿರಣಗಳು $\overrightarrow{VP}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{VQ}$, $\overline{A'B}$ ಯನ್ನು P′ ಮತ್ತು Q′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುವು. $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{A'B}$ ಬಿಂದುಗಣಗಳ ನಡುವೆ ಈ ರಚನೆಯು ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$. ಆದರೆ $d(P, Q) \neq d(P', Q')$. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 2.2

ಪುನಃ $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಅಸಮಾನ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. $d(P, Q) = d(P', Q')$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇವುಗಳ ಮೇಲೆ P, Q ಮತ್ತು P′, Q′ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ಗುಣವನ್ನು ಇವೆರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\overline{AB}$ ಯ ಮೇಲೆ ನಮಗೆ $d(C', D') = d(C, D)$

C', D' on $\overline{AB}$ such that $d(C', D') = d(C, D)$. Therefore there is no (1, 1) correspondence between the sets of points of $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$. Hence this distance-preservation transformation is not a rigid motion.

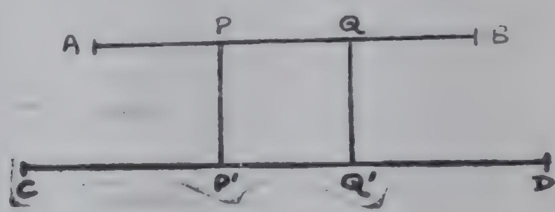


Fig. 2.3

Thus to determine a rigid motion a (1, 1) *correspondence* and *distance-preservation property* must both be satisfied. If any one of them is not satisfied there is no rigid motion between the two figures. In this case we write $F \not\cong F'$ (F is not isometric to F').

2.4 Theorems on rigid motion

***Theorem* 2.1** *If* $\overline{\mathrm{AB}} \cong \overline{\mathrm{CD}}$ *then there is a rigid motion* $\mathrm{f}: \overline{\mathrm{AB}} \to \overline{\mathrm{CD}}$ *such that* $\mathrm{f(A) = C, f(B) = D}$.

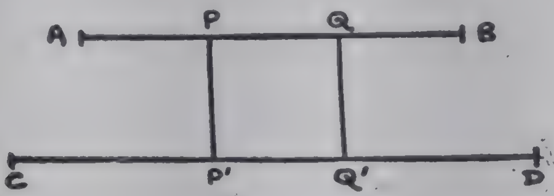
Proof $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, given

$\therefore \quad d(A, B) = d(C, D) = a,$ say

By the ruler replacement postulate a coordinate system can be fitted into $\overline{AB}$ such that the coordinate of A is 0 and that of B is a $(a > 0)$.

Let P and Q be two points on $\overline{AB}$ such that $\mathbf{B}(APQ)$ and $\mathbf{B}(PQB)$ are true. Let $d(A, P) = x$, $d(A, Q) = y$. It is clear that $x < y < a$. It is possible to choose corresponding points P', Q' on $\overline{CD}$ such that $d(C, P') = x$, $d(C, Q') = y$.

ಆಗಿರುವಂತೆ C′, D′ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಗಳ ಬಿಂದುಗಣಗಳಲ್ಲಿ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ದೂರ-ಉಳಿತಾಯ ಪರಿವರ್ತನ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 2.3

ಹೀಗೆ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು **(1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ** ಮತ್ತು **ದೂರ-ಉಳಿತಾಯ** ಗುಣ ಎರಡೂ ತಾಳೆಯಾಗಬೇಕು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತಾಳೆಯಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅಂಥ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ (ಬಿಂದು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ) ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $F \not\cong F'$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ (F, F′ ಗೆ ಐಸೋಮೆಟ್ರಿಕ್ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ).

2.4 ದೃಢಚಲನೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 2.1 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ **ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ** $f(A) = C$, $f(B) = D$ **ಆಗಿರುವಂತಹ** $f : \overline{AB} \to \overline{CD}$ **ಎಂಬ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಇದೆ.**

ಸಾಧನೆ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, ದತ್ತ

$\therefore d(A, B) = d(C, D) = a$, ಎಂದಿರಲಿ

ಬದಲಿ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧದ ಪ್ರಕಾರ A ಯ ನಿರ್ದೇಶಕವು 0 ಆಗಿರುವಂತೆಯೂ, B ಯ ನಿರ್ದೇಶಕವು $a (a > 0)$ ಆಗಿರುವಂತೆಯೂ $\overline{AB}$ ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸಬಹುದು. B (APQ) ಮತ್ತು B (PQB) ಗಳು ನಿಜವಾಗಿರುವಂತೆ P, Q ಬಿಂದುಗಳು $\overline{AB}$ ಮೇಲಿರಲಿ. $d(A, P) = x$, $d(A, Q) = y$ ಆಗಿರಲಿ. $x < y < a$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. $d(C, P') = x$, $d(C, Q') = y$ ಆಗಿರುವಂತೆ P′, Q′ ಎಂಬ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $\overline{CD}$ ಯ ಮೇಲೆ ಆರಿಸಬಹುದು.

$\therefore \quad P \leftrightarrow P', \ Q \leftrightarrow Q'$

and

$$d(P, Q) = y - x = d(P', Q')$$

$\therefore$ This (1, 1) correspondence, which may be denoted by the symbol f: preserves the distance.

$\therefore \quad f\colon \overline{AB} \to \overline{CD}$ is a rigid motion.

Theorem 2.2 *If $\overline{AB} \approx \overline{CD}$ then $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.*

Proof Let $f\colon \overline{AB} \to \overline{CD}$ determine the given rigid motion. Therefore f represents a (1, 1) correspondence between sets of points of $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ preserving distances. Hence $A \leftrightarrow C$. $B \leftrightarrow D$, $d(A, B) = d(C, D)$. Therefore $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Theorem 2.3 *If $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ then $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$*

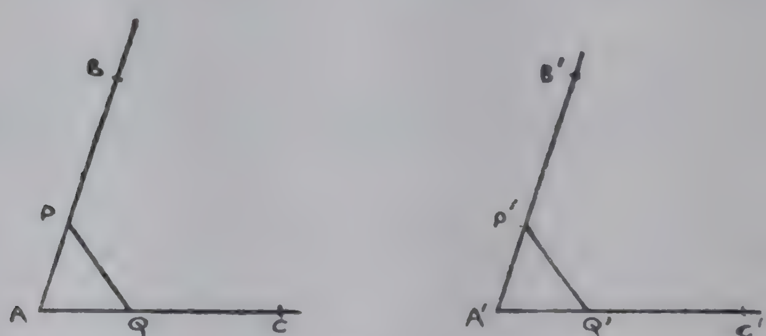


Fig. 2.4

Proof There is a rigid motion between any two rays. Hence

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A'B'}; \quad \overrightarrow{AC} \approx \overrightarrow{A'C'}$$

Let these rigid motions be denoted respectively by

$$f_1\colon \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}; \ f_2\colon \overrightarrow{AC} \to \overrightarrow{A'C'}.$$

$\therefore P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$ ಮತ್ತು $d(P, Q) = y - x = d(P', Q')$

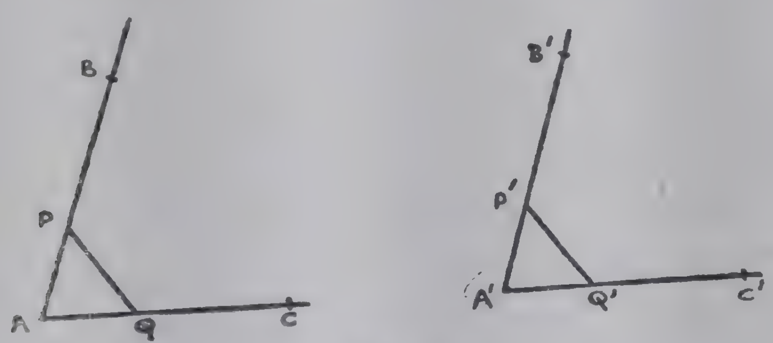
$\therefore f$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದಾದ ಈ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೂರ ಉಳಿತಾಯವಾಗಿರುವುದು.

$\therefore f: \overline{AB} \to \overline{CD}$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.2 $\overline{AB} \approx \overline{CD}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

ಸಾಧನೆ $f: \overline{AB} \to \overline{CD}$ ಯು ದತ್ತ ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ f, $\overline{AB}$ ಮತ್ತು $\overline{CD}$ ಗಳ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು, ಮತ್ತು ದೂರವನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $d(A, B) = d(C, D)$. ಆದ್ದರಿಂದ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

ಪ್ರಮೇಯ 2.3 $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$.



ಚಿತ್ರ 2.4

ಸಾಧನೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಇದೆ.

$\therefore \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A'B'}$

$\overrightarrow{AC} \approx \overrightarrow{A'C'}$

ಈ ದೃಢಚಲನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$f_1 : \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$

$f_2 : \overrightarrow{AC} \to \overrightarrow{A'C'}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

We now define a correspondence $f: \angle BAC \to \angle B'A'C'$ as follows: If $P \in \overrightarrow{AB}$ then $f(P) = f_1(P)$. If $P \in \overrightarrow{AC}$ then $f(P) = f_2(P)$. This is obviously a one-one correspondence since f_1 and f_2 are one-one. We shall now show this correspondence preserves distances.

Let P and Q be any two points on $\angle BAC$ and P', Q' the corresponding points on $\angle B'A'C'$. Two cases arise:

(*a*) Both the points may lie on the same ray. Let P and Q lie on $\overrightarrow{AB}$ so that $P, Q \in \overrightarrow{AB}$. Then $f(P) = f_1(P) = P'$, $f(Q) = f_1(Q) = Q'$. Therefore P' and Q' lie on $\overrightarrow{A'B'}$ and $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$. Since f_1 is a rigid motion $d(P, Q) = d(P', Q')$. Therefore $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$.

(*b*) The points may lie one on each of the two rays. Let $P \in \overrightarrow{AB}$ and $Q \in \overrightarrow{AC}$, then $f(P) = f_1(P) = P'$ and $f(Q) = f_2(Q) = Q'$. Therefore P' and Q' lie on $\overrightarrow{A'B'}$ and $\overrightarrow{A'C'}$ respectively. and $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$. Since f_1 and f_2 are rigid motions $d(A, P) = d(A', P')$ and $d(A, Q) = d(A', Q')$. Further it is given that $m\angle A = m\angle A'$. Therefore $\triangle APQ \cong \triangle A'P'Q'$ so that $d(P, Q) = d(P', Q')$. Hence the correspondence f preserves distances. Therefore $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$.

***Theorem* 2.4** *If $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$ then $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.*

Proof We know $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A'B'}$ and $\overrightarrow{AC} \approx \overrightarrow{A'C'}$. Let P and Q be two points such that $P \in \overrightarrow{AB}$ and $Q \in \overrightarrow{AC}$. Let $f: \angle BAC \to \angle B'A'C'$ denote a correspondence such that $f(P) = P'$ and

$f: \angle BAC \to \angle B'A'C'$ ಎಂಬ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಈಗ ನಾವು ಈ ಪ್ರಕಾರ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ: $P \in \overrightarrow{AB}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $f(P)=f_1(P)$. $P \in \overrightarrow{AC}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $f(P)=f_2(P)$. f_1 ಮತ್ತು f_2 ಗಳು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಹೊಸ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿರುವುವು ಎಂದು ನಾವು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

P ಮತ್ತು Q ಗಳು $\angle BAC$ ಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. P' ಮತ್ತು Q', $\angle B'A'C'$ ಯ ಮೇಲಿರುವ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳು ಮೂಡುತ್ತವೆ:

(*a*) ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೂ ಒಂದೇ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ ಇರಬಹುದು. P ಮತ್ತು Q, $\overrightarrow{AB}$ ಕಿರಣದ ಮೇಲಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $P, Q \in \overrightarrow{AB}$. ಆಗ $f(P)=f_1(P)=P'$, $f(Q)=f_1(Q)=Q'$. ಆದ್ದರಿಂದ P' ಮತ್ತು Q', $\overrightarrow{A'B'}$ ಮೇಲೆ ಇವೆ. ಮತ್ತು $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$. f_1 ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ $d(P, Q) = d(P', Q')$. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$.

(*b*) ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಒಂದೊಂದು ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ ಇರಬಹುದು. $P \in \overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $Q \in \overrightarrow{AC}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $f(P)=f_1(P)=P'$ ಮತ್ತು $f(Q)=f_2(Q)=Q'$. ಆದ್ದರಿಂದ P' ಮತ್ತು Q' ಕ್ರಮವಾಗಿ $\overrightarrow{A'B'}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{A'C'}$ ಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುವುವು. ಇಲ್ಲಿ $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$. f_1 ಮತ್ತು f_2 ದೃಢಚಲನೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $d(A, P) = d(A', P')$ ಮತ್ತು $d(A, Q) = d(A', Q')$. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೇ $m\angle A = m\angle A'$ ದತ್ತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle APQ \cong \triangle A'P'Q'$. ಇದರಿಂದ $d(P, Q) = d(P', Q')$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ f ಎಂಬ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿರುವುವು. ಇದರಿಂದ $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$.

ಪ್ರಮೇಯ 2.4 $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

ಸಾಧನೆ $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A'B'}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AC} \approx \overrightarrow{A'C'}$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ. $P \in \overrightarrow{AB}$, $Q \in \overrightarrow{CA}$ ಆಗಿರುವಂತೆ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿರಲಿ. $f(P) = P'$ ಮತ್ತು $f(Q) = Q'$ ಆಗಿರುವಂತೆ $f: \angle BAC \to \angle B'A'C'$ ಒಂದು

$f(Q) = Q'$. Therefore $P' \in \overrightarrow{A'B'}$ and $Q' \in \overrightarrow{A'C'}$. Obviously f is a (1, 1) correspondence. Since $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$. We have

$$\overline{AP} \cong \overline{A'P'}$$

$$\overline{AQ} \cong \overline{A'Q'}$$

$$\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$$

Therefore

$$\triangle APQ \cong \triangle A'P'Q'$$

$$\therefore \quad m\angle A = m\angle A'$$

$$\therefore \quad \angle BAC \cong \angle B'A'C'$$

Theorem 2.5 *If* $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ *then* $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$, *where* $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Proof Given

$$\triangle ABC \cong A'B'C'$$

$$\therefore \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$$

$$\therefore \quad \overline{AB} \approx \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \approx \overline{B'C'}$$

$$\overline{CA} \approx \overline{C'A'} \quad \text{(theorem 2.1)}$$

Let these rigid motions be denoted by

$$f_1: \ \overline{AB} \to \overline{A'B'}$$

$$f_2: \ \overline{BC} \to \overline{B'C'}$$

$$f_3: \ \overline{CA} \to \overline{C'A'}$$

By combining f_1, f_2, f_3 we can establish a (1, 1) correspondence between $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ as follows:

ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $P' \in \overrightarrow{A'B'}$ ಮತ್ತು $Q' \in \overrightarrow{A'C'}$. f ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. $\angle BAC \approx \angle B'A'C'$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\overline{AP} \cong \overline{A'P'}$$

$$\overline{AQ} \cong \overline{A'Q'}$$

$$\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle APQ \cong \triangle A'P'Q'$

$$\therefore m\angle A = m\angle A'$$

$$\therefore \angle BAC \cong \angle B'A'C'$$

ಪ್ರಮೇಯ 2.5 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$. ಇಲ್ಲಿ $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

ಸಾಧನೆ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, ದತ್ತ

$$\therefore \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$$

$$\therefore \overline{AB} \approx \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \approx \overline{B'C'}$$

$$\overline{CA} \approx \overline{C'A'} \text{ (ಪ್ರಮೇಯ 2.1)}$$

$$f_1 : \overline{AB} \rightarrow \overline{A'B'}$$

$$f_2 : \overline{BC} \rightarrow \overline{B'C'}$$

$f_3 : \overline{CA} \rightarrow \overline{C'A'}$, ಇವು ಈ ದೃಢಚಲನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. f_1, f_2, f_3 ಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ $\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle A'B'C'$ ಗಳ ನಡುವೆ ನಾವು f ಎಂಬ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.

If $P \in \overline{AB}$ then $f(P) = f_1(P) = P' \in \overline{A'B'}$.

If $P \in \overline{BC}$ then $f(P) = f_2(P) = P' \in \overline{B'C'}$.

If $P \in \overline{CA}$ then $f(P) = f_3(P) = P' \in \overline{C'A'}$.

We shall show that this (1, 1) correspondence f preserves distances also.

(*a*) Suppose that P, Q lie on one of the sides, say $\overline{BC}$, then $P', Q' \in \overline{B'C'}$. Since these are corresponding points in the isometry $\overline{BC} \approx \overline{B'C'}$ we have $d(P, Q) = d(P', Q')$.

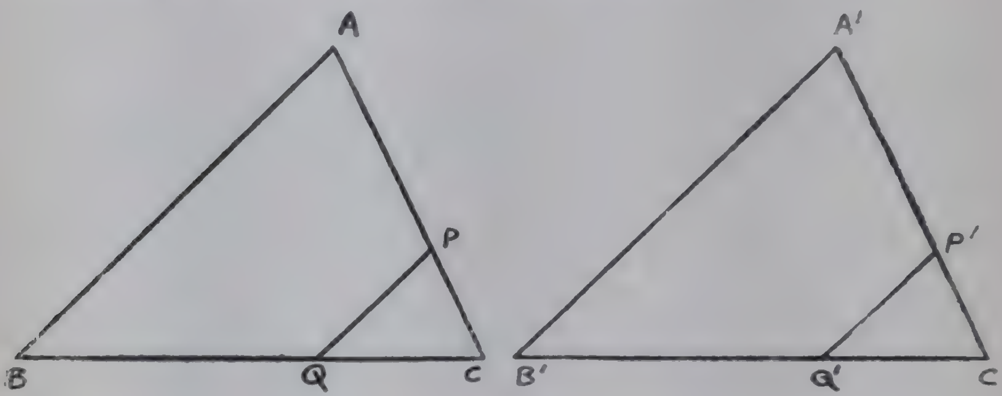


Fig. 2.5

(*b*) Next suppose P, Q lie on two different sides of the $\triangle ABC$, say $P \in \overline{AC}$, $Q \in \overline{BC}$, then $P' \in \overline{A'C'}$ and $Q' \in \overline{B'C'}$.

Here

$$d(C, P) = d(C', P')$$
$$d(C, Q) = d(C', Q')$$
$$m\angle C = m\angle C' \text{ (data)}$$

Therefore

$$\triangle CPQ \cong \triangle C'P'Q'$$

Therefore

$$d(P, Q) = d(P', Q')$$

Hence the (1, 1) correspondence f also preserves distances. Therefore $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$.

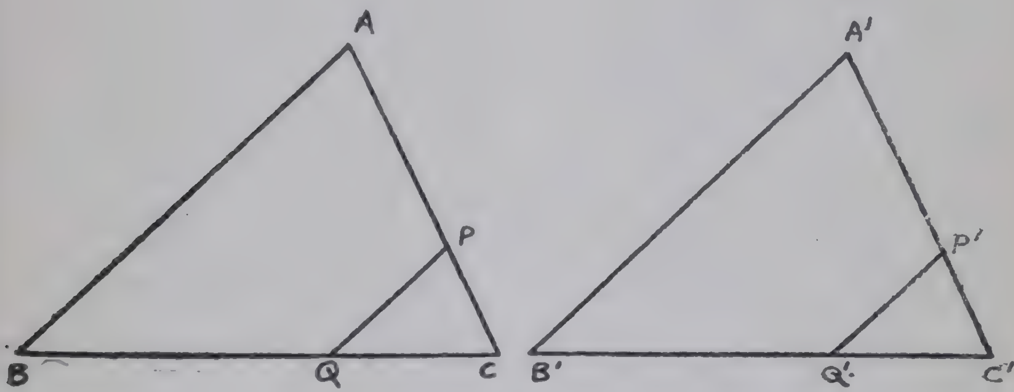
$P \in \overline{AB}$ ಆಗಿರುವಾಗ $f(P) = f_1(P) = P' \in \overline{A'B'}$

$P \in \overline{BC}$ ಆಗಿರುವಾಗ $f(P) = f_2(P) = P' \in \overline{B'C'}$

$P \in \overline{CA}$ ಆಗಿರುವಾಗ $f(P) = f_3(P) = P' \in \overline{C'A'}$

f ಎಂಬ ಈ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯು ದೂರಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಎಂದು ನಾವು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

(a) P, Q ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ—ಸ್ಪಷ್ಟತೆಗಾಗಿ $\overline{BC}$ ಯ ಮೇಲೆ—ಇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $P', Q' \in \overline{B'C'}$. $\overline{BC} \approx \overline{B'C'}$ ದೃಢಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ಇವು ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $d(P, Q) = d(P', Q')$.



ಚಿತ್ರ 2.5

(*b*) ಹೀಗಲ್ಲದಿದ್ದರೆ P, Q ಗಳು $\triangle ABC$ ಯ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಇರಬಹುದು. $P \in \overline{AC}, Q \in \overline{BC}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $P' \in \overline{A'C'}$ ಮತ್ತು $Q' \in \overline{B'C'}$. ಇಲ್ಲಿ $d(C, P) = d(C', P')$, $d(C, Q) = d(C', Q')$, $m\angle C = m\angle C'$ (ದತ್ತ). ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle CPQ \cong \triangle C'P'Q'$. ಆದ್ದರಿಂದ $d(P, Q) = d(P', Q')$. f ಎಂಬ ಈ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$.

Theorem 2.6 *If* $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$ *then* $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

The proof of this theorem is left as an exercise to the student.

Theorem 2.7 *If* C *and* C' *are two circles such that* $C \cong C'$ *then* $C \approx C'$.

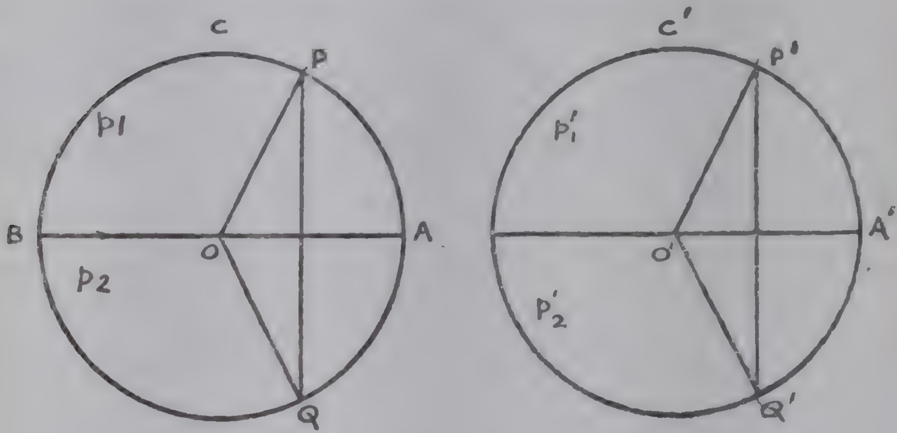


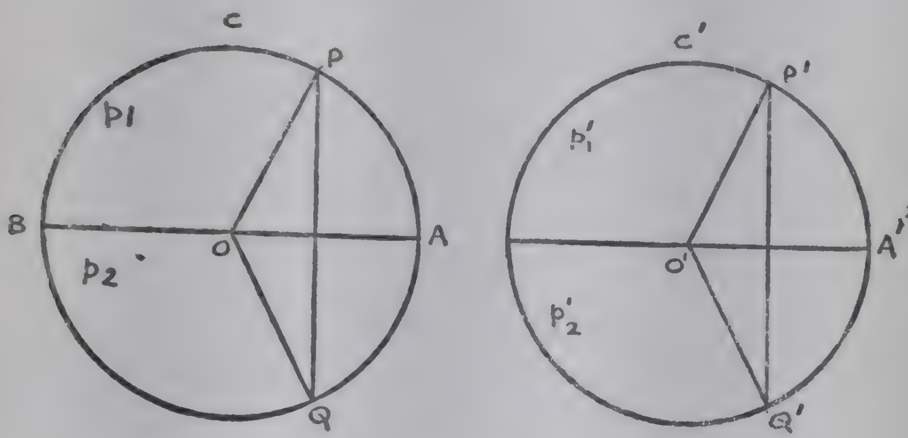
Fig. 2.6

Proof Let O, O' be the centres and $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ two diameters respectively of the two circles. Let $\overleftrightarrow{AB}$ divide the plane into half-planes p_1, p_2 and $\overleftrightarrow{A'B'}$ into halfplanes p_1', p_2'. We shall establish a (1, 1) correspondence between C, C' as follows: Let $A \leftrightarrow A'$ and $B \leftrightarrow B'$. Take any point P of C. If P is in the halfplane p_1 we take the corresponding point P' on C' in the halfplane p_1' such that $\angle AOP \cong \angle A'O'P'$. If P is in the halfplane p_2 we take the corresponding point P' on C' in the halfplane p_2' such that $\angle AOP \cong \angle A'O'P'$. This is clearly a (1, 1) correspondence. We shall now show that this correspondence preserves distances. Let P, Q be any two points on C and P', Q' the corresponding points on C'. Since

ಪ್ರಮೇಯ 2.6 $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'D'$.

ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.7 C ಮತ್ತು C′ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು. $C \cong C'$ ಆಗಿರುವಾಗ $C \approx C'$.



ಚಿತ್ರ 2.6

ಸಾಧನೆ O ಮತ್ತು O′ ಬಿಂದುಗಳು ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳೂ, $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ ಗಳು ವ್ಯಾಸಗಳೂ ಆಗಿರಲಿ. $\overleftrightarrow{AB}$ ಯು ಸಮತಲವನ್ನು p_1, p_2 ಅರ್ಧ ಸಮತಲಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಿ. ಅದೇ ರೀತಿ $\overleftrightarrow{A'B'}$ ಯು ಸಮತಲವನ್ನು p_1', p_2' ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಿ. C ಮತ್ತು C′ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ: $A \leftrightarrow A'$ ಮತ್ತು $B \leftrightarrow B'$ ಆಗಿರಲಿ. C ಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. P ಯು p_1 ಅರ್ಧಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದು P′ ನ್ನು C′ ನ ಅರ್ಧಸಮತಲ p_1' ನ ಮೇಲೆ $\angle ACP \cong \angle A'O'P'$ ಆಗುವಂತೆ ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ. P ಯು p_2 ಅರ್ಧಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದು P′ ನ್ನು C′ ನ ಅರ್ಧಸಮತಲ p_2' ನ ಮೇಲೆ $\angle ACP \cong \angle A'O'P'$ ಆಗುವಂತೆ ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೊಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯು ದೂರಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಎಂದು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. P, Q ಗಳು C ಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ; P′, Q′ ಗಳು C′ ಮೇಲಿರುವ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$d(O, P) = d(O', P')$$

$$d(O, Q) = d(O', Q')$$

and

$$\angle POQ \cong \angle P'O'Q'$$

we have

$$\triangle POQ \cong \triangle P'O'Q'$$

$$\therefore \quad d(P, Q) = d(P', Q')$$

$$\therefore \quad C \approx C'$$

***Theorem* 2.8** *If* $C \approx C'$ then $C \cong C'$.

The proof of this theorem is left as an exercise to the student.

xercise 2.1

1 Prove that there is a rigid motion between a pair of opposite sides of a rectangle.

2 S is a set of three non-collinear points. S' is a set of three collinear points. Prove that $S \approx S'$.

3 Let f : $ABC \to A'B'C'$ be a rigid motion. If $\mathbf{B}\,(ABC)$ then show that $\mathbf{B}\,(A'B'C')$.

4 Let f: $ABCD \to A'B'C'D'$ be a rigid motion. If $\mathbf{E}\,(A, B;\ C, D)$ then show that $\mathbf{E}\,(A', B';\ C', D')$.

5 Prove that there cannot be a rigid motion between a segment of a straight line and an arc of a circle.

6 If $F \cong F'$ (F is any geometrical figure) show that $F \approx F'$ and conversely.

[The congruence of F and F' establishes a (1, 1) correspondence between the two sets of points, and (*a*) the congruence of corresponding angles, (*b*) the congruence of any pair of corresponding segments. Therefore this (1, 1) correspondence preserves distances. Hence $F \approx F'$.]

$d(O, P) = d(O', P')$

$d(O, Q) = d(O', Q')$ ಮತ್ತು

$\angle POQ \cong \angle P'O'Q'$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\triangle POQ \cong \triangle P'O'Q'$

$\therefore d(P, Q) = d(P', Q')$

$\therefore C \approx C'$

ಪ್ರಮೇಯ 2.8 $C \approx C'$ **ಆಗಿದ್ದರೆ** $C \cong C'$.

ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1 ಒಂದು ಆಯತದ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಎದುರು ಭುಜಗಳ ನಡುವೆ ದೃಢಚಲನೆಯಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2 S ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ. S′ ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ. $S \not\approx S'$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 $f : ABC \rightarrow A'B'C'$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಆಗಿರಲಿ. $B(ABC)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $B(A'B'C')$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 $f : ABCD \rightarrow A'B'C'D'$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಆಗಿರಲಿ. $E(A, B : C, D)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $E(A', B', C', D')$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5 ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತಕಂಸ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಇರುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6 $F \cong F'$ (F ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿ) ಆಗಿದ್ದರೆ $F \approx F$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದರ ವಿಲೋಮವನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಿ.

[F ಮತ್ತು F' ಗಳ ಸರ್ವಸಮತ್ವವು ಇವೆರಡು ಬಿಂದುಗಣಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನೂ ಮತ್ತು (*a*) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸರ್ವಸಮತ್ವ, (*b*) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಖಂಡಗಳ ಸರ್ವ ಸಮತ್ವ ಇವನ್ನೂ ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯು ದೂರಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. $\therefore F \approx F'$.]

7 Given a rigid motion $F \approx F'$. Let A and B be points of F and suppose that F contains the segment $\overline{AB}$. Show that F' contains the segment $\overline{A'B'}$.

8 Given a rigid motion $F \approx F'$. Show that if F is convex then so also is F'.

9 Given any two congruent arcs. Prove that there is a rigid motion between them.

10 Examine whether the transformation T defined by $x = X + 4$, $y = Y - 5$ determines a rigid motion.

11 Examine whether the transformation R defined by

$$x = -\frac{X}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} Y$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} X - \frac{Y}{2}$$

determines a rigid motion.

7 $F \approx F'$ ದೃಢಚಲನೆ ದತ್ತವಾಗಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು F ನಲ್ಲಿವೆ. F, $\overline{AB}$ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದ್ದರೆ F′, $\overline{A'B'}$ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8 $F \approx F'$ ಎಂಬ ದೃಢಚಲನೆ ದತ್ತವಾಗಿದೆ. F ಉಬ್ಬುಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ F′ ಸಹ ಉಬ್ಬುಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9 ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಕಂಸಗಳು ದತ್ತವಾಗಿರುವಾಗ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಇದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10 $x = X + 4$, $y = Y - 5$ ಸಮೀಕರಣಗಳು T ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತವೆ. T ಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

11 $$x = -\frac{X}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{Y}{2}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳು R ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತವೆ. R ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

3 GEOMETRICAL TRANSFORMATIONS

3.1 Plane geometrical transformations

We consider here plane geometrical transformations. To enable us to study them in the light of rigid motion these transformations can be broadly divided into three categories—*translation, rotation* and *reflection*.

3.2 Translation

Let $f\colon F \to F'$ represent a (1, 1) correspondence between two geometrical figures F and F'. Therefore if $P \leftrightarrow P'$ then $P' = f(P)$. If the operator f should determine a *translation*, the nature of such a transformation requires that every point $P \in F$ and the corresponding point $P' \in F'$ should satisfy the relation $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$ with respect to a fixed directed line-segment $\overrightarrow{AB}$.

(*Note* We use the symbol $\overrightarrow{AB}$ here to denote the directed segment A to B and not the ray).

This means that $\overrightarrow{PP'}$ and $\overrightarrow{AB}$ should be equal both in magnitude and direction. In this case by moving F in the direction $\overrightarrow{AB}$ through a distance $\overrightarrow{AB}$ we obtain F'. Therefore it can be seen that in a translation a straight line l becomes another equal straight line l', a triangle ABC becomes another congruent triangle $A'B'C'$ and a circle C becomes another congruent circle C'.

***Theorem* 3.1.** *Translation is a rigid motion.*

Proof Let P, Q F and the corresponding points $P', Q' \in F'$. Let $f\colon F \to F'$ determine a translation between F and

3 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು

3.1 ಸಮತಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು

ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಸಮತಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ದೃಢಚಲನೆಯ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ಸೌಕರ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನೂ ಮೂರು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು —**ಸರಳಪರಿವರ್ತನೆ, ಆವರ್ತನೆ** ಮತ್ತು **ಪ್ರತಿಫಲನ.**

3.2 ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ

F ಮತ್ತು F′ ಎಂಬ ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ $f: F \rightarrow F'$ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $P \leftrightarrow P'$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $P' = f(P)$. f ಎಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಒಂದು **ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ**ಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸ್ವರೂಪದ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು $P \in F$ ಗೂ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದು $P' \in F'$ ಗೂ, ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ರೇಖಾಖಂಡ $\overrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು ಕುರಿತು, $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವಿರಬೇಕು. (ಇಲ್ಲಿ $\overrightarrow{AB}$ ಸಾಂಕೇತಿಕ ನಿರೂಪಣೆಯು A ಯಿಂದ B ವರೆಗೆ ಇರುವ ನಿಯೋಜಿತ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು, ಕಿರಣವನ್ನಲ್ಲ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು). $\overrightarrow{PP'}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AB}$ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಶೆಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ F ನ್ನು $\overrightarrow{AB}$ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ $\overrightarrow{AB}$ ದೂರ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿ F′ ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ l ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು l' ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾನ ಸರಳರೇಖೆ ಆಗುವುದು; $\triangle ABC$ ಯು ಇನ್ನೊಂದು ಸರ್ವಸಮ $\triangle A'B'C'$ ಆಗುವುದು; ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ C ಇನ್ನೊಂದು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತ C′ ಆಗುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 3.1 ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ $P, Q \in F$ ಆಗಿರಲಿ; ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳು $P', Q' \in F'$ ಆಗಿರಲಿ. $f: F \rightarrow F'$ ಎಂಬುದು F ಮತ್ತು F′ ಗಳ ನಡುವೆ $\overrightarrow{AB}$ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಆಗ ಸರಳ

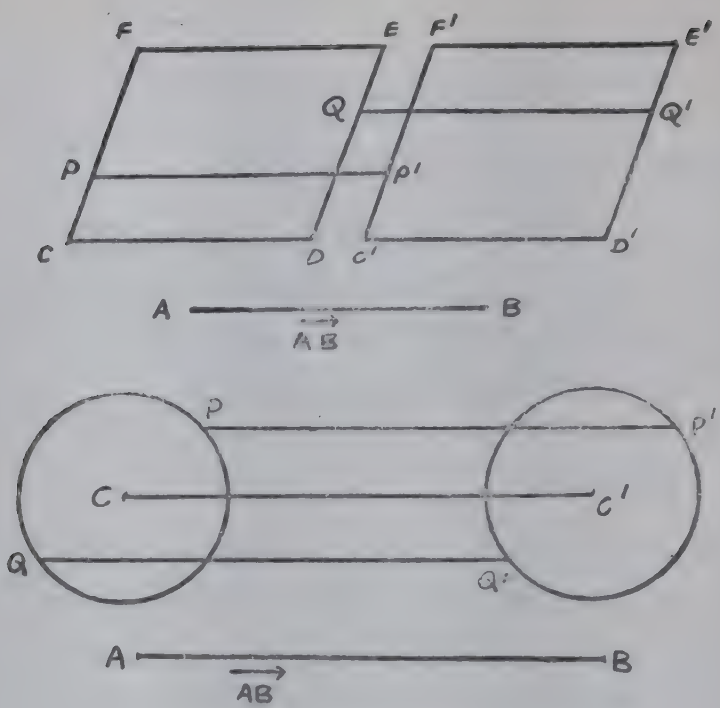


Fig. 3.1

F' in the direction $\overrightarrow{AB}$. Then by definition of translation f is a (1, 1) correspondence. We shall prove that this correspondence preserves distances.

$$\left.\begin{aligned} d(P, P') &= d(A, B) \\ d(Q, Q') &= d(A, B) \end{aligned}\right\} \text{ by the definition of translation}$$

$\therefore \quad d(P, P') = d(Q, Q')$

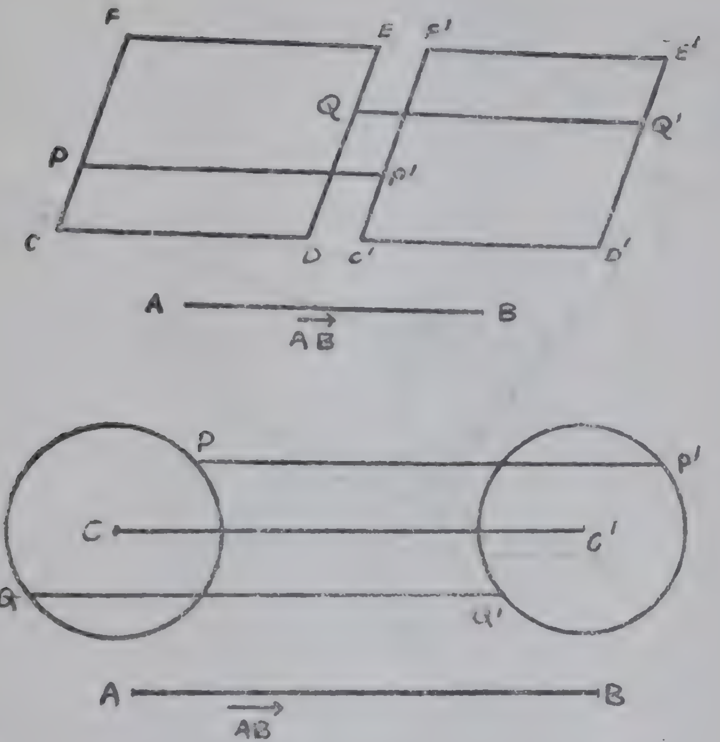
$\therefore \quad \overline{PP'} \cong \overline{QQ'}$ and they are parallel.

$\therefore \quad PP'Q'Q$ is a parallelogram. Hence

$d(P, Q) = d(P' Q')$.

3.3 Rotation

Let f: $F \to F'$ represent a (1, 1) correspondence between two geometrical figures F and F'. Therefore if $P \leftrightarrow P'$ then $P' = f(P)$. If the operator f should determine a *rotation*, the



ಚಿತ್ರ 3.1

ಪರಿವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ f ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆಗಿದೆ. ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿರುವುವು ಎಂದು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\left.\begin{array}{l} d(P, P') = d(A, B) \\ d(Q, Q') = d(A, B) \end{array}\right\}$$ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ

$\therefore d(P, P') = d(Q, Q')$

$\therefore \overline{PP'} \cong \overline{QQ'}$ ಮತ್ತು ಅವು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ.

$\therefore$ PP′Q′Q ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $d(P, Q) = d(P', Q')$.

3.3 ಆವರ್ತನೆ

F ಮತ್ತು F′ ಎಂಬ ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ $f : F \to F'$ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $P \leftrightarrow P'$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $P' = f(P)$. f ಪರಿಕರ್ಮಿಯು ಒಂದು **ಆವರ್ತನೆಯನ್ನು**

nature of such a transformation requires that every point $P \in F$ and the corresponding point $P' \in F'$ should satisfy the relations $m\angle PAP' = \theta$, $\overline{AP} \cong \overline{AP'}$. A is called the *invariant point* for

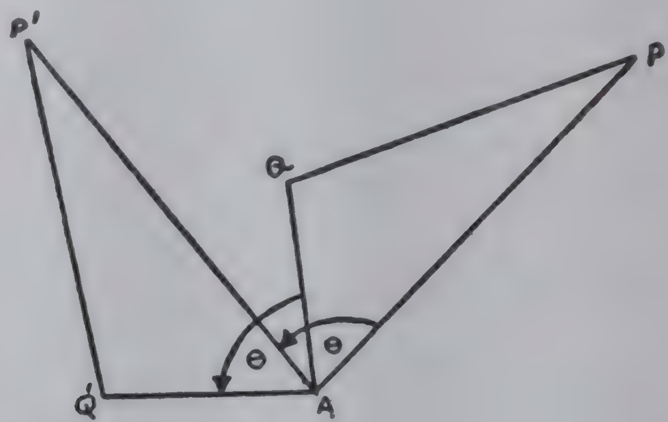


Fig. 3.2

the rotation. θ is called the *angle of rotation*. When $\theta = 2n\pi$, $n=0$ or $n \in$ I the rotation transforms F into itself. Such a rotation is called an *identical transformation*. When a figure F rotates about the invariant point A through an angle θ we get F'. Hence in this transformation all the points of F move on the circumferences of circles centre A and radii their distances from A. Further the arc traced out by each point subtends the same angle θ at A.

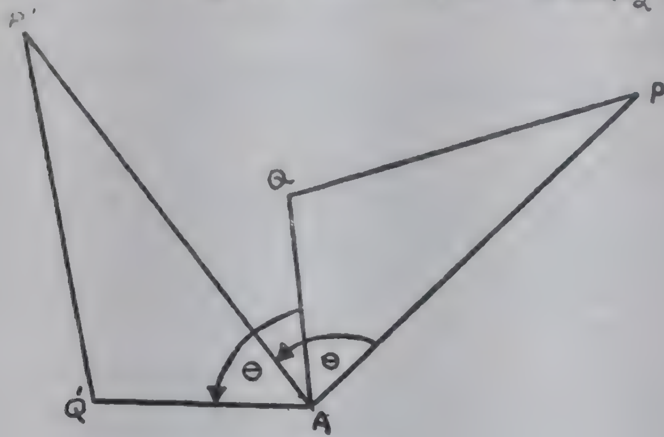
***Theorem* 3.2** *Rotation is a rigid motion.*

Proof Let $P, Q \in F$ and the corresponding points $P', Q' \in F'$. Let $f\colon F \to F'$ determine a rotation between F and F'. Let A be the invariant point and θ the angle of rotation. Then by definition of rotation f is a (1, 1) correspondence. We shall prove that this correspondence preserves distances. By the definition of rotation

$$\overline{AP} \cong \overline{AP'}$$

$$\overline{AQ} \cong \overline{AQ'}$$

ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಸ್ವರೂಪದ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿ ಒಂದು $P \in F$ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ $P' \in F'$, $m \angle PAP' = \theta$ ಮತ್ತು $\overline{AP} \cong \overline{AP}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತಾಳಿ ಮಾಡಬೇಕು. A ಯನ್ನು ಆವರ್ತನೆಯ



ಚಿತ್ರ 3.2

ನಿಶ್ಚರಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. θ ವನ್ನು **ಆವರ್ತನೆಯ ಕೋನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\theta = 2n\pi$, $n = 0$ ಅಥವಾ $n \in I$ ಆದಾಗ ಆವರ್ತನೆಯು F ನ್ನು F ಆಗಿಯೇ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಆವರ್ತನೆಯನ್ನು ಒಂದು **ಐಕ್ಯಪರಿವರ್ತನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಆಕೃತಿ F ನಿಶ್ಚರ ಬಿಂದು A ಯ ಸುತ್ತಲೂ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿದಾಗ F′ ಆಕೃತಿ ದೊರೆಯು ವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪರಿವರ್ತನೆಯಲ್ಲಿ F ನ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ A ಕೇಂದ್ರ ವಾಗಿದ್ದು A ಯಿಂದ ಆಯಾ ಬಿಂದುಗಳ ದೂರಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಗಳ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ರೇಖಿಸುವ ಕಂಸ A ಯಲ್ಲಿ θ ಕೋನವನ್ನೇ ರಚಿಸುವುವು.

ಪ್ರಮೇಯ 3.2 ಆವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ $P, Q \in F$ ಮತ್ತು $P', Q' \in F'$ ಆಗಿರಲಿ; $f: F \to F'$ ಎಂಬುದು F ಮತ್ತು F′ ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಆವರ್ತನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. A ಯು ನಿಶ್ಚರಬಿಂದುವೂ, θ ವು ಆವರ್ತನೆಯ ಕೋನವೂ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಆವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ f ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆಗಿದೆ. ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿರುವುವು ಎಂದು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ

$$\overline{AP} \cong \overline{AP'}$$

$$\overline{AQ} \cong \overline{AQ'}$$

$$m\angle PAP' = m\angle QAQ' = \theta$$

$\therefore$ $m\angle PAQ = m\angle P'AQ'$ (removing $m\angle QAP'$ from both)

$\therefore$ $\triangle APQ \cong \triangle AP'Q'$

$\therefore$ $d(P, Q) = d(P', Q')$

3.4 Symmetry

We know that a circle is symmetrical about any diameter. An isosceles triangle is symmetrical about the perpendicular bisector of its base. In these examples the figures are symmetrical about a straight line called the *axis of symmetry*. *Symmetry* about a straight line l is defined as follows: Sets of points $\{P\}$ and $\{P'\}$ are symmetrical with respect to l if l bisects perpendicularly the segment $\overline{PP'}$.

There can be symmetry with respect to a point also. Symmetry with respect to a point is defined as follows: Sets of points $\{P\}$ and $\{P'\}$ are symmetrical with respect to a point A if A is the midpoint of the segment $\overline{PP'}$. The point A is called the *invariant point*. It is easy to see that symmetry with respect to a point is a special case of rotation where the angle of rotation $\theta = \pi$.

The figure formed by the points P, Q, R, S is rotated about A through an angle π and the new figure $P'Q'R'S'$ is obtained. Here both the figures are symmetrical with respect to the invariant

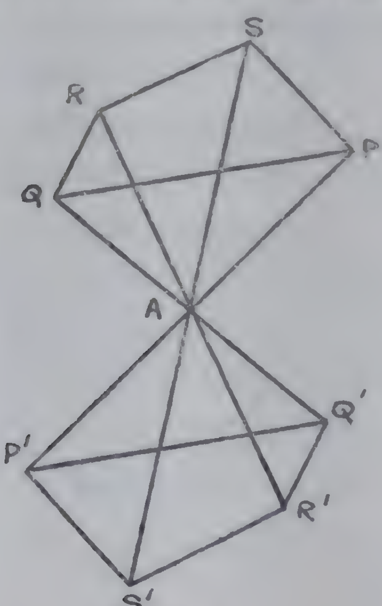


Fig. 3.3

$$m\angle PAP' = m\angle QAQ' = \theta$$

$\therefore m\angle PAQ = m\angle P'AQ'$ (ಎರಡರಿಂದಲೂ $m\angle QAP'$ ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ)

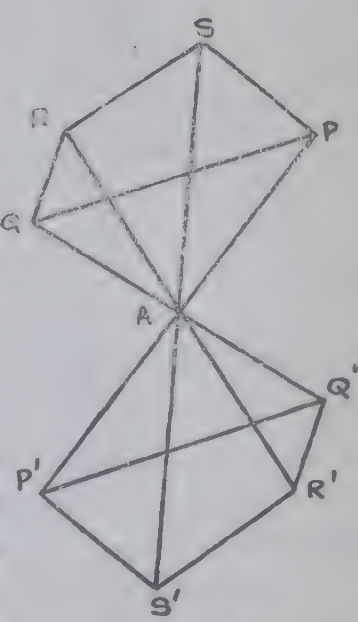
$$\therefore \triangle APQ \cong \triangle AP'Q'$$

$$\therefore d(P, Q) = d(P', Q')$$

3.4 ಸಮಾಂಗತ್ವ

ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಯಾವುದೇ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹುತ್ರಿಭುಜವು ಅದರ ಪಾದದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. ಇವೆಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ. ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ lನ್ನು ಕುರಿತು **ಸಮಾಂಗತ್ವ**ವನ್ನು ಹೀಗೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ: l ಸರಳ ರೇಖೆಯು {P} ಮತ್ತು {P′} ಬಿಂದುಗಣಗಳಲ್ಲಿ $\overline{PP'}$ ಯನ್ನು ಲಂಬದ್ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆ ಗಣಗಳು lನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಹ ಸಮಾಂಗತ್ವವಿರಬಹುದು. ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗತ್ವವನ್ನು ಹೀಗೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ: A ಬಿಂದುವು {P} ಮತ್ತು {P′} ಬಿಂದುಗಣಗಳಲ್ಲಿ $\overline{PP'}$ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಗಣಗಳು A ಯನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ. A ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿಶ್ಚಲಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗತ್ವವು ಆವರ್ತನೆಯ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ರೂಪವೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಆವರ್ತನೆಯ ಕೋನ $\theta = \pi$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.3

P, Q, R, S ಬಿಂದುಗಳು ರಚಿಸುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು A ಯ ಸುತ್ತಲೂ π ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ P′Q′R′S′ ಎಂಬ ಹೊಸ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳೂ ನಿಶ್ಚಲಬಿಂದು A ಯನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ. ಆವರ್ತನೆಯ ಕೋನ 2π

point A. We call a rotation through 2π a *full rotation* and through π a *half rotation.* Therefore if two figures are symmetrical with respect to an invariant point then one can be obtained by a half rotation of the other about A.

3.5 Reflection

Let $f: F \to F'$ be a (1, 1) correspondence between two geometrical figures F and F'. This correspondence will denote a *reflection* if for sets of points $\{P\}$ of F and $\{P'\}$ of F', l is the perpendicular bisector of the segment $\overline{PP'}$. l is called the *axis of reflection.* If P lies on l then $P'=P$. F and F' are called the *images* or *reflections* of each other in l.

***Theorem* 3.3** *Reflection is a rigid motion*

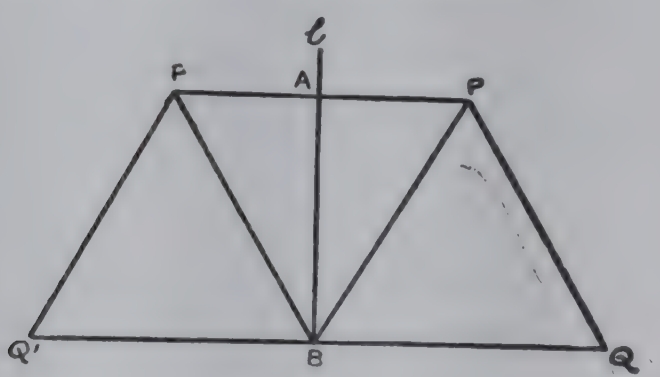


Fig. 3.4

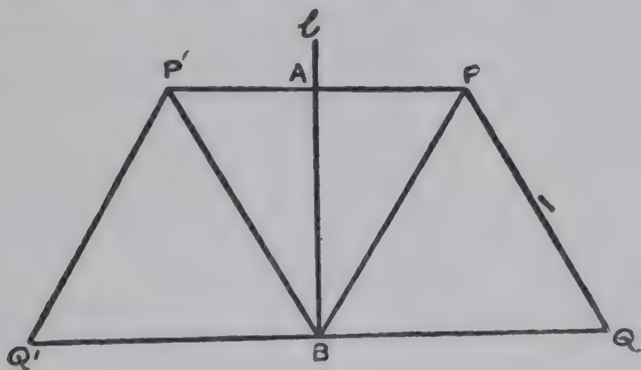
Proof Let $P, Q \in F$ and the corresponding points $P', Q' \in F'$. Let $f: F \to F'$ determine a reflection between F and F' with respect to the axis of reflection l. Then by definition of reflection f is a (1, 1) correspondence. We shall prove this correspondence preserves distances. By the definition of reflection l is the perpendicular bisector of the segments $\overline{PP'}$ and $\overline{QQ'}$. Let the intersections of l with $\overline{PP'}$ and $\overline{QQ'}$ be respectively A and B.

ಆದಾಗ ಅದನ್ನು **ಪೂರ್ಣಾವರ್ತನೆ** ಎಂದೂ, π ಆದಾಗ ಅದನ್ನು **ಅರ್ಧಾವರ್ತನೆ** ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದು ನಿಶ್ಚರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಒಂದನ್ನು ನಿಶ್ಚರಬಿಂದು A ಯ ಸುತ್ತಲೂ ಅರ್ಧಾವರ್ತನೆ ಮಾಡಿ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

3.5 ಪ್ರತಿಫಲನ

F ಮತ್ತು F′ ಎಂಬ ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ $f: F \to F'$ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. F ನ {P} ಬಿಂದುಗಣ ಮತ್ತು F′ ನ {P′} ಬಿಂದುಗಣ ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ $\overline{PP'}$ ನ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವು l ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯು ಒಂದು **ಪ್ರತಿಫಲನ** ಆಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. l ನ್ನು **ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $P \in l$ ಆಗಿರುವಾಗ $F' = P$. F ಮತ್ತು F′ ಗಳು l ನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದರ **ಪ್ರತಿಬಿಂಬ** ಅಥವಾ **ಪ್ರತಿಫಲನ** ಇನ್ನೊಂದು ಆಗಿವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.3 ಪ್ರತಿಫಲನವು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ



ಚಿತ್ರ 3.4

ಸಾಧನೆ P, Q ∈ F ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳು P′, Q′ ∈ F′ ಆಗಿರಲಿ. $f: F \to F'$ ಎಂಬುದು F ಮತ್ತು F′ ಗಳ ನಡುವೆ l ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಆಗ ಪ್ರತಿಫಲನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ f ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೂರಗಳು ಉಳಿದಿರುವುವು ಎಂದು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿಫಲನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ l, $\overline{PP'}$ ಮತ್ತು $\overline{QQ'}$ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗಿದೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳು $\overline{PP'}$ ಮತ್ತು $\overline{QQ'}$ ಗಳೊಡನೆ l ನ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

In the triangles ABP and ABP',

$$\overline{AP} \cong \overline{AP'}$$

$\overline{AB}$ is common and

$$m\angle PAB = \frac{\pi}{2} = m\angle P'AB$$

$\therefore \quad \triangle ABP \cong \triangle ABP'$

$\therefore \quad \overline{BP} \cong \overline{BP'},\ m\angle ABP = m\angle ABP'$

In the triangles BPQ and $BP'Q'$

$\overline{BP} \cong \overline{BP'}$ (proved)

$\overline{BQ} \cong \overline{BQ'}$ (definition of reflection)

and

$$m\angle PBQ = \frac{\pi}{2} - m\angle ABP$$

$$= \frac{\pi}{2} - m\angle ABP'$$

$$= m\angle P'BQ'$$

$\therefore \quad \triangle PBQ \cong \triangle P'BQ'$

$\therefore \quad d(P, Q) = d(P', Q')$

Note (1) Special cases such as $P = P'$, $Q \neq Q'$; $P = P'$, $Q = Q'$; P, Q lying on either sides of the axis of reflection should be proved by the student.

(2) Mathematically symmetry about an axis is reflection with respect to that axis. Since reflection is a rigid motion symmetry about an axis is also a rigid motion.

(3) Symmetry with respect to a point being the same as half-rotation about that (invariant) point is a rigid motion. This is because rotation is a rigid motion.

(4) Reflection can be viewed as half-rotation about the axis of reflection.

$\triangle ABP$ ಮತ್ತು $\triangle ABP'$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\overline{AP} \cong \overline{AP'}$, $\overline{AB}$ ಯು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು

$$m \angle PAB = \frac{\pi}{2} = m \angle P'AB$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ABP'$

$\therefore \overline{BP} \cong \overline{BP'}$, $m \angle ABP = m \angle ABP'$

$\triangle BPQ$ ಮತ್ತು $\triangle BP'Q'$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\overline{BP} \cong \overline{BP'}$ (ಸಾಧಿತ)

$\overline{BQ} \cong \overline{BQ'}$ (ಪ್ರತಿಫಲನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ) ಮತ್ತು

$$m \angle PBQ = \frac{\pi}{2} - m \angle ABP$$

$$= \frac{\pi}{2} - m \angle ABP'$$

$$= m \angle P'BQ'$$

$\therefore \triangle PBQ \cong \triangle P'BQ'$

$\therefore d(P, Q) = d(P', Q')$

ಸೂಚನೆ (1) $P = P'$, $Q \neq Q'$; $P = P'$, $Q = Q'$; P, Q ಗಳು ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷದ ಒಂದೊಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳು — ಇಂಥ ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

(2) ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದು ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗತ್ವವು ಅದೇ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಪ್ರತಿಫಲನವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಫಲನವು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಒಂದು ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗತ್ವವೂ ದೃಢಚಲನೆ ಯಾಗಿದೆ.

(3) ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗತ್ವವು, ಆ ಬಿಂದುವಿನ (ನಿಶ್ಚರ ಬಿಂದು) ಸುತ್ತ ಅರ್ಧಾವರ್ತನೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ದೃಢಚಲನೆ ಆಗಿದೆ. ಆವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಆಗಿರುವುದೇ ಇದರ ಕಾರಣ.

(4) ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಅರ್ಧಾವರ್ತನೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

3.6 Chain reflections

Let F_0 be a given figure. Let the reflection of F_0 with respect to an axis of reflection l_1 be F_1. Let the reflection of F_1 with respect to l_2 be F_2 and so on. Let this chain be continued and let the reflection of F_{n-1} with respect to l_n be F_n. Thus through a *chain* of n reflections we have transformed F_0 to F_n.

Since reflection is a rigid motion we may put the above idea symbolically as follows:

Let f_1: $F_0 \to F_1$ determine a reflection.

Let f_2: $F_1 \to F_2$ determine a reflection.

. . . .

. . . .

Let f_{n-1}: $f_{n-1} \to F_n$ determine a reflection

By the definition of reflection each of the f's represents a (1, 1) correspondence. Let P_0, $Q_0 \in F_0$; the corresponding points P_1, $Q_1 \in F_1$; the corresponding points (of P_1, Q_1) P_2, $Q_2 \in F_2$ and so on. Let P_n, $Q_n \in F_n$ be the corresponding points of P_{n-1}, $Q_{n-1} \in F_{n-1}$. Reflection being a rigid motion preserves distances.

$$\therefore \quad d(P_0, Q_0) = d(P_1, Q_1), \text{ from } f_1$$

$$d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2), \text{ from } f_2$$

. . . .

. . . .

$$d(P_{n-1}, Q_{n-1}) = d(P_n, Q_n), \text{ from } f_n$$

$$\therefore \quad d(P_0, Q_0) = d(P_n, Q_n)$$

Further $P_0 \leftrightarrow P_n$, $Q_0 \leftrightarrow Q_n$

Therefore $F_0 \approx F_n$, *i.e.*, there is a *single* rigid motion which transforms F_0 to F_n. That is,

ϕ: $F_0 \to F_n$ is a rigid motion. Thus the ***product of n reflections is a rigid motion.***

3.6 ಪ್ರತಿಫಲನಾಪರಂಪರೆ

F_0 ಒಂದು ದತ್ತ ಆಕೃತಿ ಆಗಿರಲಿ. l_1 ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು F_0 ಯ ಪ್ರತಿಫಲನವು F_1 ಆಗಿರಲಿ. l_2 ನ್ನು ಕುರಿತು F_1 ರ ಪ್ರತಿಫಲನವು F_2 ಆಗಿರಲಿ. ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ l_n ನ್ನು ಕುರಿತು F_{n-1} ರ ಪ್ರತಿಫಲನವು F_n ಆಗಿರಲಿ. ಹೀಗೆ n **ಪ್ರತಿಫಲನಾಪರಂಪರೆಯ** ಮೂಲಕ F_0 ಯನ್ನು F_n ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಪ್ರತಿಫಲನ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$f_1 : F_0 \to F_1$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ

$f_2 : F_1 \to F_2$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ

. . . .

. . . .

$f_n : F_{n-1} \to F_n$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ

ಪ್ರತಿಫಲನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು f ಸಹ ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು. $P_0, Q_0 \in F_0$ ಆಗಿರಲಿ; ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳಾದ $P_1, Q_1 \in F_1$ ಆಗಿರಲಿ; (P_1, Q_1 ರ) ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳಾದ $P_2, Q_2 \in F_2$ ಆಗಿರಲಿ; ಇತ್ಯಾದಿ. $P_n, Q_n \in F_n$, $P_{n-1}, Q_{n-1} \in F_{n-1}$ ಇವುಗಳ ಅನುರೂಪಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಪ್ರತಿಫಲನವು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದೂರಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

$\therefore d(P_0, Q_0) = d(P_1, Q_1)$, f_1 ರಿಂದ

$d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2)$, f_2 ರಿಂದ

. . . .

. . . .

$d(P_{n-1}, Q_{n-1}) = d(P_n, Q_n)$, f_n ನಿಂದ

$\therefore d(P_0, Q_0) = d(P_n, Q_n)$

ಮತ್ತು $P_0 \leftrightarrow P_n$, $Q_0 \leftrightarrow Q_n$

ಆದ್ದರಿಂದ $F_0 \approx F_n$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ; ಅಂದರೆ F_0 ಯನ್ನು F_n ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ಒಂದೇ **ಒಂದು** ದೃಢಚಲನೆಯಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\phi : F_0 \to F_n$ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ n **ಪ್ರತಿಫಲನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.**

Note Reflection is a rigid motion but every rigid motion is not a reflection. Hence it will not be correct to say that the rigid motion ϕ: $F \rightarrow F_n$ is a reflection. The conditions for this to be a reflection need investigation.

Theorem 3.4 A set of six coplanar points A, B, C, A′, B′, C′ *satisfy the relations* E(A, B; A′, B′), E(B, C; B′, C′), E(C, A; C′, A′). *The number of chain reflections that carry the points* A′, B′, C′ *to* A, B, C *does not exceed three.*

Proof Let us suppose that the given six points are all distinct. *First*, take l_1, the perpendicular bisector of $\overline{AA'}$ as the axis of reflection. Then A' is reflected to A. Let B_1 and C_1 be the reflections of B' and C'. *Second*, take l_2 the perpendicular bisector of $\overline{BB_1}$ as the axis of reflection. Since E$(A, B; A, B_1)$ l_2 passes through A. Then A is not affected, B_1 is reflected to B. Let C_2 be the reflection of C_1. *Third*, take l_3 the perpendicular bisector of $\overline{CC_2}$ as the axis of reflection. Since E$(B, C; B, C_2)$, E$(A, C; A, C_2)$, l_3 coincides with the line $\overleftrightarrow{AB}$. Then A and B are not affected but C_2 is reflected to C. This proves the theorem.

Note (1) If any one pair out of the three pairs of points mentioned above were to coincide there would be a reduction of one step in our proof.

(2) Let F and F' be two congruent polygons whose vertices are $A, B, C, \ldots$ and $A', B', C', \ldots$ respectively. By repeating the construction given above, at the end of the *second* stage we get two congruent polygons $ABCDE\ldots$ and $ABC_2D_2E_3\ldots$

ಸೂಚನೆ ಪ್ರತಿಫಲನವು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ; ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ದೃಢ ಚಲನೆಯೂ ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $\phi : F_0 \rightarrow F_n$ ಒಂದು ಪ್ರತಿ ಫಲನವೆಂದು ಹೇಳುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ. ಇದೂ ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನವಾಗಲು ನಿಯಮಗಳೇನು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರಮೇಯ 3.4 A, B, C, A′, B′, C′ ಎಂಬ ಆರು ಸಮತಲ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣ E (A, B ; A′, B′), E (B, C ; B′, C′), E (C, A ; C′, A′) ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. A′, B′, C′ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು A, B, C ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುವ ಪ್ರತಿಫಲನಾಪರಂಪರೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂರನ್ನು ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ ದತ್ತ ಆರು ಬಿಂದುಗಳೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. **ಮೊದಲು,** $\overline{AA'}$ ನ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ l_1ನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಗ A′ ನ ಪ್ರತಿಫಲನವು A ಆಗುವುದು. B′ ಮತ್ತು C′ ಗಳ ಪ್ರತಿಫಲನಗಳು B_1 ಮತ್ತು C_1 ಆಗಿರಲಿ. **ಎರಡನೆಯದಾಗಿ,** $\overline{BB_1}$ ರ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ l_2 ನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. E (A, B; A, B_1) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ l_2 ಅಕ್ಷವು A ಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. A ಯು ಈ ಪ್ರತಿಫಲನದಿಂದ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ; B_1 ರ ಪ್ರತಿಫಲನವು B ಆಗುವುದು. C_1 ರ ಪ್ರತಿಫಲನವು C_2 ಆಗಿರಲಿ. **ಮೂರನೆಯದಾಗಿ,** $\overline{CC_2}$ ರ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ l_3ನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. E (B, C; B, C_2), E (A, C; A, C_2) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ l_3 ಅಕ್ಷವು $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು. ಆಗ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ C_2 ರ ಪ್ರತಿಫಲನ C ಆಗುವುದು. ಇದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು.

ಸೂಚನೆ (1) ಮೇಲೆ ಆರಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಮೂರು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ನಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.

(2) F ಮತ್ತು F′ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಬಹುಭುಜಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಶೃಂಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C, ... ಮತ್ತು A′, B′, C′, ... ಆಗಿರಲಿ. ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ರಚನೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದರೆ, ಎರಡನೆಯ ಹಂತದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ABCDE . . . . ಮತ್ತು A B C_2 D_2 E_2 . . . . ಎಂಬ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಬಹುಭುಜಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. $\overleftrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು

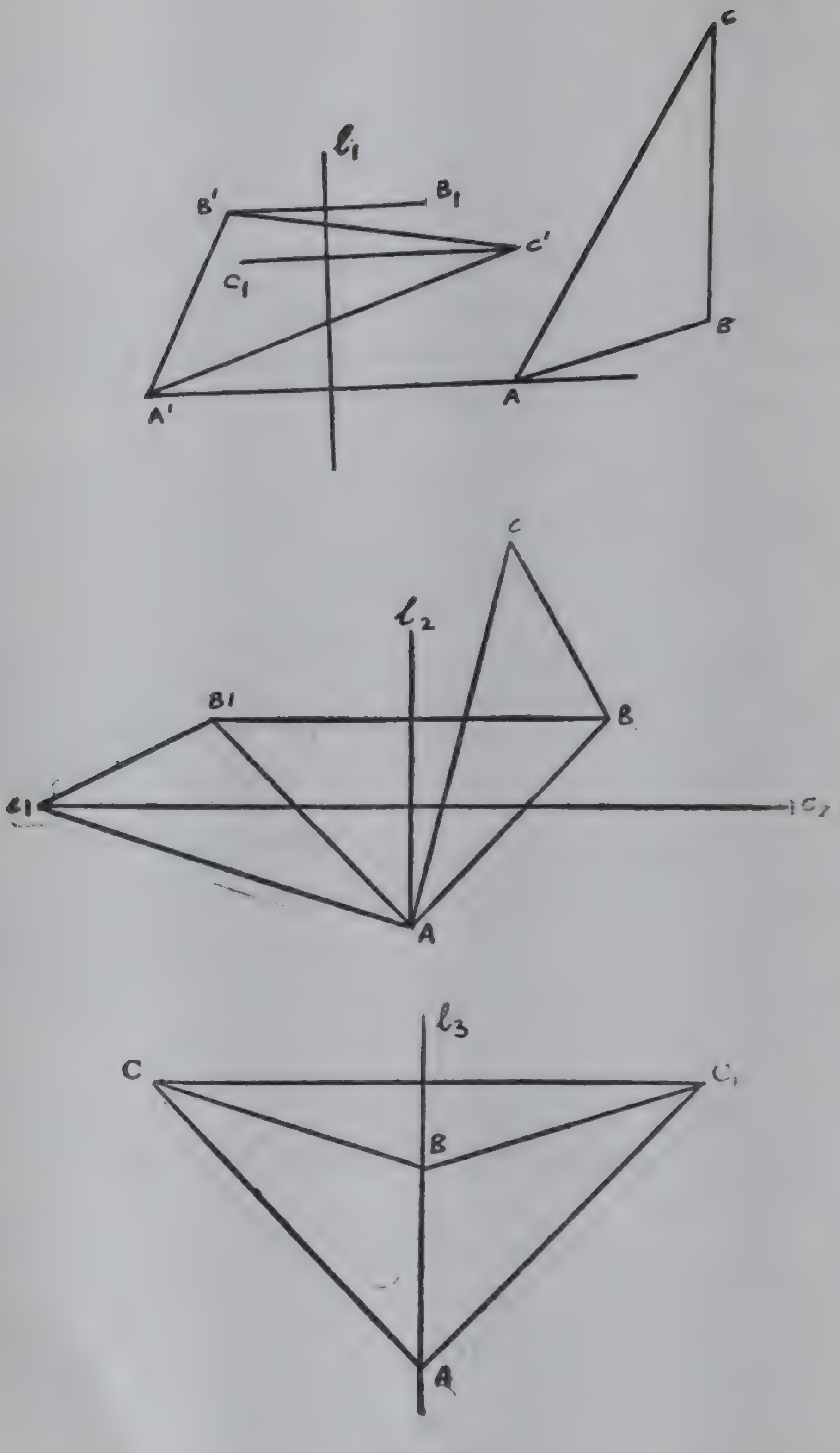
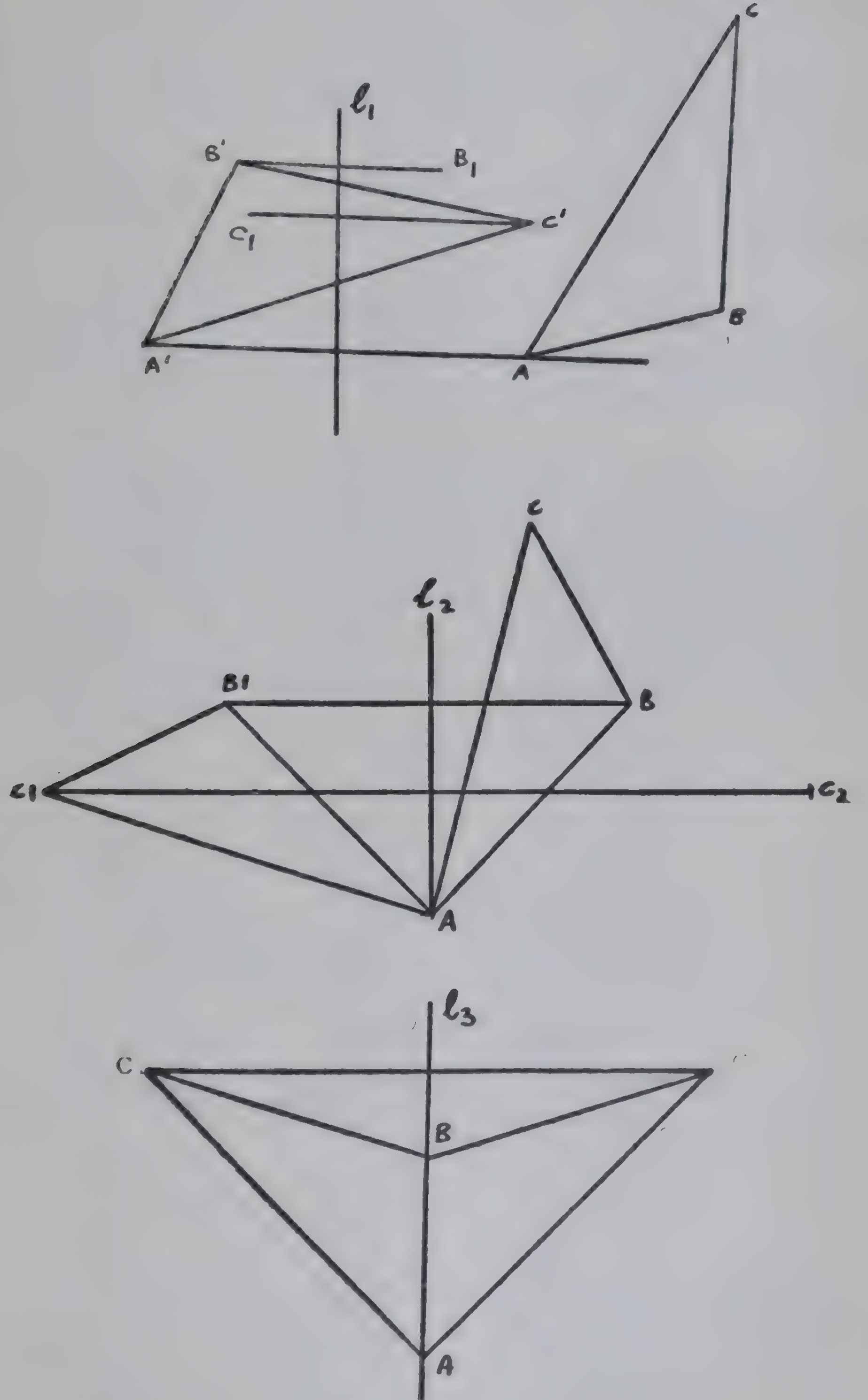


Fig. 3.5



ಚಿತ್ರ 3.5

By choosing $\overleftrightarrow{AB}$ as the axis of reflection $ABC_2D_2E_2$ .... can be reflected to $ABCDE$.... The generalised statement of the theorem 3.4 is as follows: *The maximum number of chain reflections that will carry a given polygon to a congruent polygon is three.*

Theorem 3.5 *Any rigid motion can be obtained as a product of not more than three reflections.*

Proof Let $F \approx F'$ be the given rigid motion. Let A, B, $C \in F$ be any three non-collinear points and A', B', $C' \in F'$ be the corresponding points.

We can move from A', B', C' to A, B, C by a chain of at most three reflections. Since reflection (and so chain reflection) is a rigid motion let us suppose that this chain represents the rigid motion $F' \approx F''$. Now by the constructions of the reflections we have $A'' = A$, $B'' = B$, $C'' = C$. This idea is schematically conveyed in the following figure. We shall now show that for

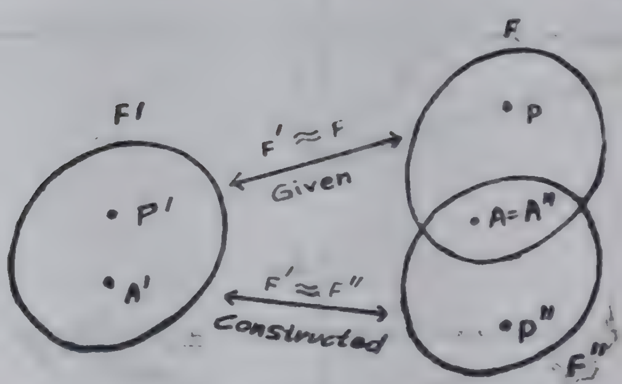


Fig. 3.6

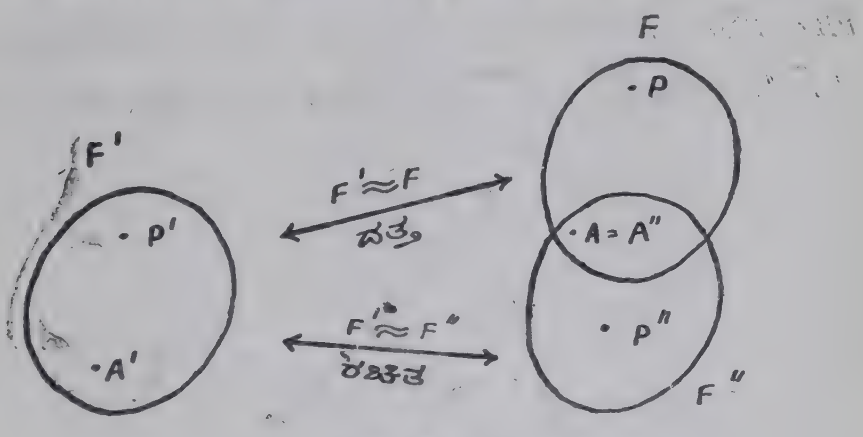
every point $P \in F$ we have $P'' = P$. This will show that F'' coincides with F and that the given rigid motion $F \approx F'$ is identical with the one determined by the chain of reflections. Consider any point $P \in F$, its corresponding point $P' \in F'$ as determined by the rigid motion $F \approx F'$ and the point $P'' \in F''$ as determined by the

ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವಾಗಿ ಆರಿಸಿದರೆ $ABC_3D_3E_3$ . . . . ಬಹುಭುಜವು ABCDE . . . . ಬಹುಭುಜವಾಗಿ ಪ್ರತಿಫಲಿತವಾಗುವುದು. ಪ್ರಮೇಯ 3.4 ರ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕೃತರೂಪ ಹೀಗಿದೆ: **ಒಂದು ದತ್ತ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಸರ್ವಸಮ ಬಹುಭುಜಕ್ಕೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುವ ಪ್ರತಿಫಲನಾಪರಂಪರೆಯ ಪರಮಾವಧಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂರು.**

ಪ್ರಮೇಯ 3.5 ಯಾವುದೇ ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ಮೂರನ್ನು ಮೀರದ ಪ್ರತಿಫಲನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಸಾಧನೆ $F \approx F'$ ದತ್ತ ದೃಢಚಲನೆ ಆಗಿರಲಿ. $A, B, C \in F$ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ; $A', B', C' \in F'$ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

A', B', C' ನಿಂದ A, B, C ಗೆ ನಾವು ಪರಮಾವಧಿ ಮೂರು ಪ್ರತಿಫಲನಾ ಪರಂಪರೆಯ ಮೂಲಕ ಚಲಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಫಲನವು (ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಫಲನಾ



ಚಿತ್ರ 3.6

ಪರಂಪರೆಯು) ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $F' \approx F''$ ಎಂಬ ದೃಢ ಚಲನೆಯನ್ನು ಈ ಪರಂಪರೆಯು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಈಗ, ಪ್ರತಿಫಲನಗಳ ರಚನೆಗಳಿಂದ $A'' = A$, $B'' = B$, $C'' = C$ ಆಗಿವೆ. ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಒಂದು ಚಿತ್ರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 3.6). $P \in F$ ಆಗಿರುವ ಪ್ರತಿಬಿಂದು P ಗೂ $P'' = F$ ಎಂದು ನಾವು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ F', F ನೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದೆಂದೂ ದತ್ತ ದೃಢಚಲನೆ $F \approx F'$ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಫಲನಾ ಪರಂಪರೆಯಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಿತವಾದ ದೃಢಚಲನೆ $F' \approx F''$ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. $P \in F$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು, $F \approx F'$ ನಿರ್ಧರಿಸುವ P ಯ ಅನುರೂಪಬಿಂದು $P' \in F'$ ಬಿಂದುವನ್ನು, $F' \approx F''$ ಪ್ರತಿಫಲನಾ

chain of reflections $F' \approx F''$. We have already shown above $A'' = A$, $B'' = B$, $C'' = C$. Since all our relationships are rigid motions we have $\overline{AP''} \cong \overline{A'P'} \cong \overline{AP}$. Similarly $\overline{BP''} \cong \overline{BP}$ and $\overline{CP''} \cong \overline{CP}$.

$$\therefore \quad \triangle ABP \cong \triangle ABP''$$

$$\therefore \quad \angle BAP \cong \angle BAP'$$

If P and P'' are on the same side of $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP''}$ and since $\overline{AP} \cong \overline{AP''}$ it follows that $P = P''$.

If P and P'' lie on opposite sides of $\overleftrightarrow{AB}$ since $\overline{PA} \cong \overline{P''A}$ and $\overline{PB} \cong \overline{P''B}$ it follows that A, B lie on the perpendicular bisector of $\overline{PP''}$. Since $\overline{PC} \cong \overline{P''C}$, C also lies on this line, which is against

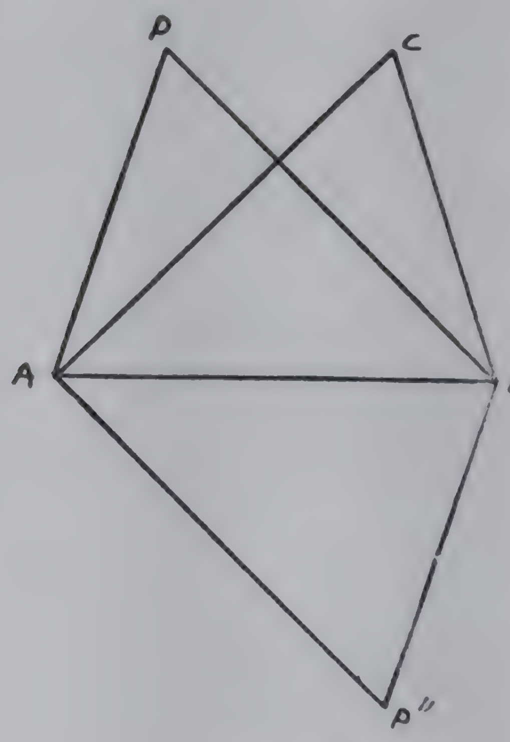


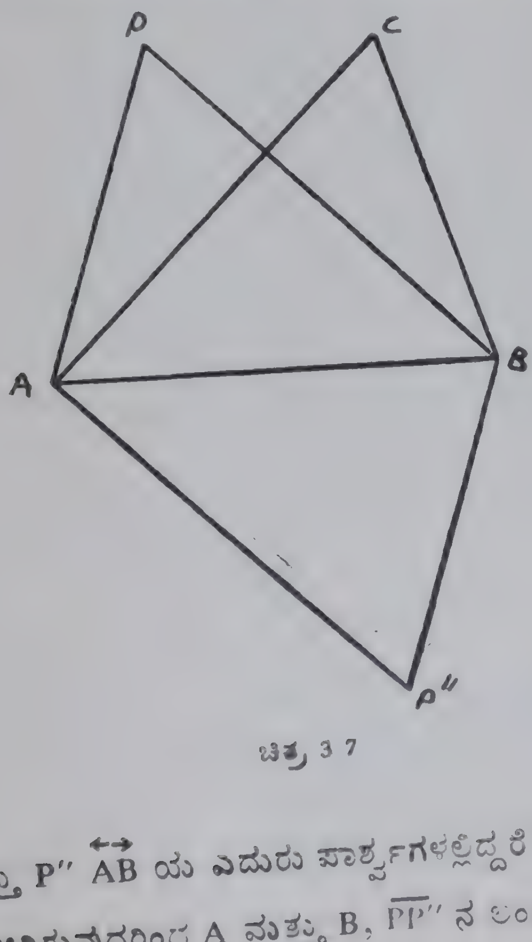
Fig. 3.7

ಪರಂಪರೆಯು ನಿರ್ಧರಿಸುವ (P' ನ) ಅನುರೂಪಬಿಂದು $P'' \in F''$ ವನ್ನೂ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. $A'' = A$, $B'' = B$, $C'' = C$ ಎಂದು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ನಮ್ಮ ಎಲ್ಲ ಸಂಬಂಧಗಳೂ ದೃಢಚಲನೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\overline{AP''} \cong \overline{AP} \cong \overline{AP}$ ಆಗಿವೆ. ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ $\overline{BP''} \cong \overline{BP}$ ಮತ್ತು $\overline{CP''} \cong \overline{CP}$ ಆಗಿವೆ.

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ABP''$$

$$\therefore \angle BAP \cong \angle BAP''$$

P ಮತ್ತು P″ $\overleftrightarrow{AB}$ ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP''}$ ಮತ್ತು $\overline{AP} \cong \overline{AP''}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $P = P''$ ಎಂದು ಸಾಧಿತವಾಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 37

P ಮತ್ತು P″ $\overleftrightarrow{AB}$ ಯ ಎದುರು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\overline{PA} \cong \overline{P''A}$ ಮತ್ತು $\overline{PB} \cong \overline{P''B}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ A ಮತ್ತು B, $\overline{PP''}$ ನ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇರಬೇಕು. $\overline{PC} \cong \overline{P''C}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದೇ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ C ಸಹ

our assumption, namely A, B, C are noncollinear points. Hence this case does not arise. Therefore $P = P''$ thus proving the theorem.

3.7 Congruence and rigid motion

A careful study of the foregoing articles will show that *congruence* and *rigid motion* are synonyms. That is, if two figures are congruent then there is a rigid motion between them and conversely. The question may rightly be asked as to the need for the introduction of these new words *rigid motion*. A further careful study of the conditions of congruence between segments, angles, triangles, circles, etc., will show that in each case they are to be worded separately. For instance, the conditions governing the congruence of two circles are entirely different from those governing the congruence of two triangles. Can we not rationalise the condition or conditions of congruence? The answer is Rigid Motion. *Rigid motion has generalised the concept of congruence.* Rigid motion is an abstract mathematical concept. The two well-known conditions governing the rigid motion between the two given figures not only cover congruence but also translation, rotation, reflection and so on.

3.8 Analytical Treatment

Let $\{P\}$ be the set of points of F and $\{P'\}$ the set of corresponding points of F'. If there is a rigid motion between F and F' then $P \leftrightarrow P'$ and $d(P, Q) = d(P', Q')$. If $P, Q \in F$ have cartesian coordinates (x_1, y_1) and (x_2, y_2) and the corresponding points $P', Q' \in F'$ have the coordinates (x_1', y_1'), (x_2', y_2') the second condition amounts to

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2.$$

ಇರಬೇಕು. ಆದರೆ ಇದು ನಮ್ಮ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಗೆ (A, B, C ಮೂರು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳು) ವಿರೋಧವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭ ತಲೆದೋರುವುದಿಲ್ಲ. ಹೀಗಾಗಿ $P = P''$. ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

3.7 ಸರ್ವಸಮತ್ವ ಮತ್ತು ದೃಢಚಲನೆ

ಇದುವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಕೂಲಂಕಷ ಅಭ್ಯಾಸದಿಂದ **ಸರ್ವಸಮತ್ವವೂ ದೃಢಚಲನೆಯೂ** ಪರ್ಯಾಯ ಪದಗಳೆಂದು ವಿದಿತವಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆ ಇದೆ. ಇವರ ವಿಲೋಮವೂ ನಿಜ. ಹಾಗಾದರೆ **ದೃಢಚಲನೆ** ಎಂಬ ಈ ನೂತನ ಪದಪ್ರಯೋಗದ ಆವಶ್ಯಕತೆಯೇನು ಎನ್ನುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಖಂಡಗಳ, ಕೋನಗಳ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ, ವೃತ್ತಗಳ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಸರ್ವಸಮತ್ವದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಲು ಇರುವ ನಿಯಮಗಳು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಲು ಇರುವ ನಿಯಮಗಳಿಗಿಂತ ಪೂರ್ಣ ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ— ಸರ್ವಸಮತ್ವದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದೀತೆ? ಇಂಥ ಒಂದು ನಿಯಮ ಅಥವಾ ನಿಯಮಗಳು ಎಲ್ಲ ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತಿರಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ದೃಢಚಲನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ದೃಢಚಲನೆಯು ಸರ್ವಸಮತ್ವ ಭಾವನೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ.** ದೃಢಚಲನೆಯು ಒಂದು ಅಮೂರ್ತ ಗಣಿತ ಭಾವನೆ. ದೃಢಚಲನೆಯ ಎರಡು ಚಿರಪರಿಚಿತ ನಿಯಮಗಳು ಸರ್ವಸಮತ್ವವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ, ಆವರ್ತನೆ. ಪ್ರತಿಫಲನ ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿವೆ.

3.8 ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಪ್ರಕಾರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

$\{P\}$ ಯು F ನ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $\{P'\}$ ಯು F' ನ ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. F ಮತ್ತು F' ನಡುವೆ ದೃಢಚಲನೆ ಇದ್ದರೆ ಆಗ $P \leftrightarrow P'$ ಮತ್ತು $d(P, Q) = d(P', Q')$. $P, Q \in F$ ಬಿಂದುಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪಬಿಂದು $P', Q' \in F'$ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1', y_1') ಮತ್ತು (x_2', y_2') ಆಗಿದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

(*a*) *Translation* Let the coordinates of a point P be (x, y) Let it move parallel to the axes through a and b and become the point $Q(X, Y)$. Then $X = x + a$, $Y = y + b$.

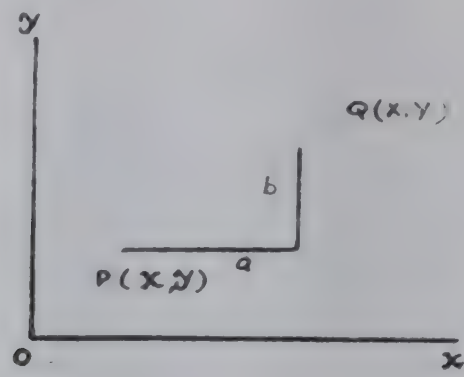


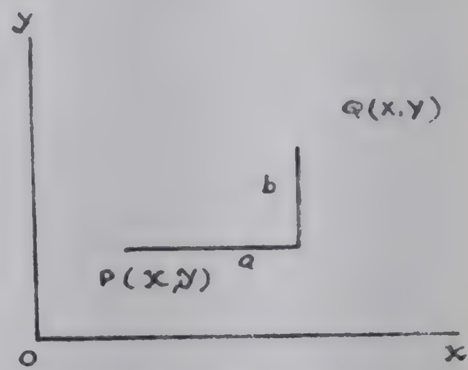
Fig. 3.8

These are the equations of translation. Two successive translations of P along two perpendicular directions takes it to Q. This is the same as the translation of P along $\overrightarrow{PQ}$ through $\overline{PQ}$. Thus the product of two translations is also a translation. Conversely any translation of P to Q can be expressed as the product of two translations in perpendicular directions. In general the product of any number of translations of P (*see* definition in § 3.2) is a single translation.

Let T_1 define the translation of $P_0(x_0, y_0)$ to $P_1(x_1, y_1)$ through a_1, b_1 parallel to the axes; T_2 define the translation of $P_1(x_1, y_1)$ to $P_2(x_2, y_2)$ through a_2, b_2 parallel to the axes and so on. Let T_n define the translation of $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ to $P_n(x_n, y_n)$. Then

$$T_1: \quad x_1 = x_0 + a_1$$
$$y_1 = y_0 + b_1$$
$$T_2: \quad x_2 = x_1 + a_2$$
$$y_2 = y_1 + b_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

(c) **ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ.** P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಆಗಿರಲಿ. ಅದು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ದೂರ ಚಲಿಸಿ Q (X, Y) ಸ್ಥಾನ ಹೊಂದಲಿ. ಆಗ $X = x + a$, $Y = y + b$. ಇವು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಎರಡು ಲಂಬ ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು P ಯನ್ನು Q ಗೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರ ಪರಿಣಾಮ P ಯ $\overrightarrow{PQ}$ ದಿಕ್ಕಿನ ಮತ್ತು ಅಷ್ಟೇ ಪರಿಮಾಣದ ಚಲನೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಯಾವುದೇ P ಯಿಂದ Q ಗೆ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಎರಡು ಲಂಬ ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿನ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಹಲವಾರು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. (ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ § 3.2 ನ್ನು ನೋಡಬೇಕು).



ಚಿತ್ರ 3.8

T_1 ಎಂಬುದು $P_0(x_0, y_0)$ ನ್ನು $P_1(x_1, y_1)$ಕ್ಕೆ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ a_1 ಮತ್ತು b_1 ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸುವ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. T_2 ಎಂಬುದು $P_1(x_1, y_1)$ ನ್ನು $P_2(x_2, y_2)$ ಕ್ಕೆ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ a_2 ಮತ್ತು b_2 ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ; ಇತ್ಯಾದಿ. ಇದೇ ರೀತಿ T_n ಎಂಬುದು $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ ನ್ನು $P_n(x_n, y_n)$ ಗೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸುವ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು. ಆಗ,

$$T_1: \; x_1 = x_0 + a_1$$
$$y_1 = y_0 + b_1$$
$$T_2: \; x_2 = x_1 + a_2$$
$$y_2 = y_1 + b_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$T_n: \; x_n = x_{n-1} + a_n$$

$$y_n = y_{n-1} + b_n$$

$$\therefore \; x_n = x_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\therefore \; y_n = y_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

These are the equations of a single translation.

If $T_1 \cdot T_2$ be the product of two translations T_1 and T_2 (which means carry out the translation T_1 first and T_2 next) then

$$T_1 T_2: \quad x_2 = x_0 + a_1 + a_2$$

$$y_2 = y_0 + b_1 + b_2$$

If T_2 is carried out first and T_1 next the equations are

$$T_2: \quad x_1 = x_0 + a_2$$

$$y_1 = y_0 + b_2$$

$$T_1: \quad x_2 = x_1 + a_1$$

$$y_2 = y_1 + b_1$$

$$\therefore \; T_2 T_1: \quad x_2 = x_0 + a_1 + a_2$$

$$y_2 = y_0 + b_1 + b_2$$

It is clear that $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$. Hence translation is commutative.

***Alternative proof for theorem* 3.1** *Translation is a rigid motion.*

Proof Let $P, Q \in F$ and the corresponding points $P', Q' \in F'$. Let $f: F \to F'$ determine a translation between F and F' in the direction $\overrightarrow{AB}$ whose components parallel to the axes are a and b. Then by definition of translation f is a (1, 1) correspondence. Let the coordinates of P and Q be (x_1, y_1) and (x_2, y_2) respectively

$$T_n : x_n = x_{n-1} + a_n$$
$$y_n = y_{n-1} + b_n$$
$$\therefore \quad x_n = x_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$\therefore \quad y_n = y_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

ಇವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿವೆ.

T_1 ಮತ್ತು T_2 ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $T_1.T_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ (ಇದರ ಅರ್ಥ T_1 ನ್ನು ಮೊದಲು ನಿರ್ವಹಿಸಿ ಮುಂದೆ T_2 ನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕು) ಆಗ,

$$T_1T_2 : x_2 = x_0 + a_1 + a_2$$
$$y_2 = y_0 + b_1 + b_2$$

T_2 ನ್ನು ಮೊದಲು ನಿರ್ವಹಿಸಿ ಮುಂದೆ T_1 ನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿದರೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ—

$$T_2 : x_1 = x_0 + a_2$$
$$y_1 = y_0 + b_2$$
$$T_1 : x_2 = x_1 + a_1$$
$$y_2 = y_1 + b_1$$
$$\therefore \quad T_2T_1 : x_2 = x_0 + a_1 + a_2$$
$$y_2 = y_0 + b_1 + b_2$$

$T_1 . T_2 = T_2 . T_1$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.1ಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಒಂದು ಸಾಧನೆ. ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ $P, Q \in F$ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪಬಿಂದುಗಳು $P', Q' \in F'$ ಆಗಿರಲಿ. $f : F \to F'$, F ಮತ್ತು F′ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು $\overrightarrow{AB}$ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ (ಮತ್ತು ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ) ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಅದರ x- ಮತ್ತು y-ದಿಕ್ಕಿನ ಘಟಕಗಳು a ಮತ್ತು b ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ f ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆಗಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2)

and those of P', Q' be (x_1', y_1') and (x_2', y_2') respectively. Then

$$x_1' = x_1 + a, \quad x_2' = x_2 + a$$

$$y_1' = y_1 + b, \quad y_2' = y_2 + b$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d(P', Q') = \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2}$$

It is clear that $d(P, Q) = d(P', Q')$

(*b*) *Rotation* Let $P(x, y)$ revolve round $A(\alpha, \beta)$, the invariant point, through an angle θ and become the point $Q(X, Y)$. Then

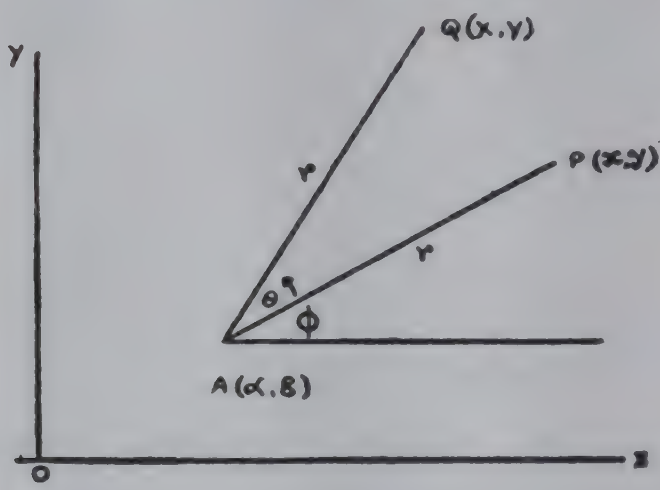


Fig. 3.8

$$X = \alpha + r\cos(\theta + \phi)$$
$$= \alpha + (x - \alpha)\cos\theta - (y - \beta)\sin\theta$$

$$Y = \beta + r\sin(\theta + \phi)$$
$$= \beta + (x - \alpha)\sin\theta + (y - \beta)\cos\theta$$

These are the equations of rotation. If the origin is chosen as the invariant point these equations

ಆಗಿರಲಿ. P′, Q′ ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (x_1', y_1') ಮತ್ತು (x_2', y_2') ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$x_1' = x_1 + a, \qquad x_2' = x_2 + a$$

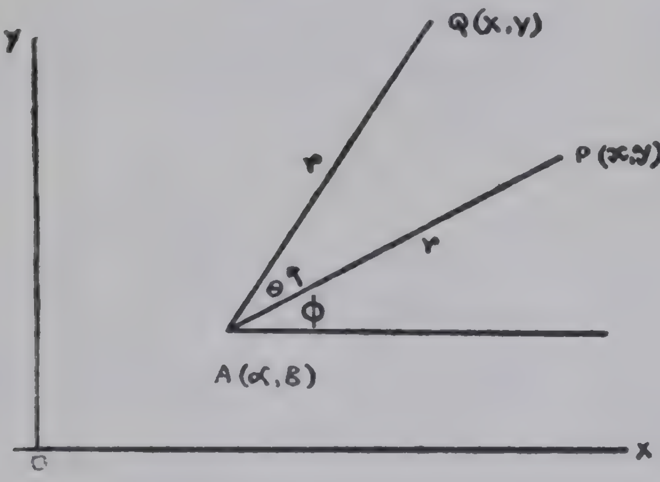
$$y_1' = y_1 + b, \qquad y_2' = y_2 + b$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$$d(P', Q') = \sqrt{(x_1'-x_2')^2 + (y_1'-y_2')^2}$$

$$d(P, Q) = d(P', Q')$$

(*b*) **ಆವರ್ತನೆ** P (x, y) ಬಿಂದುವು ನಿಶ್ಚರಬಿಂದು A (α, β) ದ ಸುತ್ತಲೂ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ Q (X, Y) ಬಿಂದು ಆಗಲಿ. ಆಗ



ಚಿತ್ರ 3.8

$$X = \alpha + r\cos(\theta+\phi)$$

$$= \alpha + (x-\alpha)\cos\theta - (y-\beta)\sin\theta$$

$$Y = \beta + r\sin(\theta+\phi)$$

$$= \beta + (x-\alpha)\sin\theta + (y-\beta)\cos\theta$$

ಇವು ಆವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ನಿಶ್ಚರಬಿಂದು ವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು

become

$$X = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$Y = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Let R_1 define a rotation of $P_0(x_0, y_0)$ to $P_1(x_1, y_1)$ through an angle θ_1 about the origin. Let R_2 define a rotation of $P_1(x_1, y_1)$ through an angle θ_2 about the origin and so on. Let R_n define a rotation of $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ through an angle θ_n about the origin. Then

$$R_1: \quad x_1 = x_0\cos\theta_1 - y_0\sin\theta_1$$
$$y_1 = x_0\sin\theta_1 + y_0\cos\theta_1$$

$$R_2: \quad x_2 = x_1\cos\theta_2 - y_1\sin\theta_2$$
$$y_2 = x_1\sin\theta_2 + y_1\cos\theta_2$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$R_n: \quad x_n = x_{n-1}\cos\theta_n - y_{n-1}\sin\theta_n$$
$$y_n = x_{n-1}\sin\theta_n + y_{n-1}\cos\theta_n$$

If $R_1 . R_2$ be the product of R_1 and R_2 (in that order) we have

$$R_1R_2: \quad x_2 = x_0\cos(\theta_1 + \theta_2) - y_0\sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_2 = x_0\sin(\theta_1 + \theta_2) + y_0\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Proceeding in the same way we can show that

$$R_1 R_2 R_3 \ldots R_n: \quad x_n = x_0\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) - y_0\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$
$$y_n = x_0\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + y_0\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

Thus the product of a series of rotations about the same invariant point is a rotation about the same point. The angle

$$X = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$Y = x\sin\theta + y\cos\theta$$ ಆಗುವುವು.

$P_0(x_0, y_0)$ ಬಿಂದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ θ_1 ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ $P_1(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ; P_1 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ θ_2 ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ $P_2(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ; ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿದು, $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ ಬಿಂದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ θ_n ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ $P_n(x_n, y_n)$ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ. ಈ ಆವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಿ. ಆಗ

$$R_1: \; x_1 = x_0\cos\theta_1 - y_0\sin\theta_1$$
$$y_1 = x_0\sin\theta_1 + y_0\cos\theta_1$$
$$R_2: \; x_2 = x_1\cos\theta_2 - y_1\sin\theta_2$$
$$y_2 = x_1\sin\theta_2 + y_1\cos\theta_2$$

. . .

. . .

$$R_n: \; x_n = x_{n-1}\cos\theta_n - y_{n-1}\sin\theta_n$$
$$y_n = x_{n-1}\sin\theta_n + y_{n-1}\cos\theta_n$$

R_1 ಮತ್ತು R_2 ರ ಗುಣಲಬ್ಧವು (ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ) $R_1 R_2$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$R_1R_2: \; x_2 = x_0\cos(\theta_1 + \theta_2) - y_0\sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_2 = x_0\sin(\theta_1 + \theta_2) + y_0\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$R_1R_2R_3\ldots R_n: \; x_n = x_0\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) - y_0\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$
$$y_n = x_0\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + y_0\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ನಿಶ್ಚರಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತ ಹಲವಾರು ಆವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅದೇ ನಿಶ್ಚರಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತ ಒಂದು ಆವರ್ತನೆ ಆಗಿದೆ.

of rotation is the sum of the angles of the separate rotations.

The student should verify that the same property holds good when the invariant point is any other point also.

Again, if R_2 is carried out first and R_1 next the equations ar

$$R_2: \quad x_1 = x_0 \cos \theta_2 - y_0 \sin \theta_2$$

$$y_1 = x_0 \sin \theta_2 + y_0 \cos \theta_2$$

$$R_1: \quad x_2 = x_1 \cos \theta_1 - y_1 \sin \theta_1$$

$$y_2 = x_1 \sin \theta_1 + y_1 \cos \theta_1$$

$$\therefore \quad R_2.R_1: \quad x_2 = x_0 \cos (\theta_1 + \theta_2) - y_0 \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = x_0 \sin (\theta_1 + \theta_2) + y_0 \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\therefore \quad R_1 . R_2 = R_2 . R_1$$

Therefore rotation is commutative.

Alternative proof for Theorem 3.2. *Rotation is a rigid motion.*

Proof Let P, Q, $\in F$ and the corresponding points P', $Q' \in F'$. Let f: $F \to F'$ determine a rotation between F and F'. Let A be the invariant point (Fig. 3.2) and θ the angle of rotation. Then by definition of rotation f is a (1, 1) correspondence. Let the coordinates of P and Q be (x_1, y_1) and (x_2, y_2) respectively and those of P' and Q' be (x_1', y_1') and (x_2', y_2') respectively. Then

$$x_1' = \alpha + (x_1 - \alpha) \cos \theta - (y_1 - \beta) \sin \theta$$

$$y_1' = \beta + (x_1 - \alpha) \sin \theta + (y_1 - \beta) \cos \theta$$

$$x_2' = \alpha + (x_2 - \alpha) \cos \theta - (y_2 - \beta) \sin \theta$$

$$y_2' = \beta + (x_2 - \alpha) \sin \theta + (y_2 - \beta) \cos \theta$$

where (α, β) are the coordinates of A.

ಈ ಆವರ್ತನೆಯ ಕೋನವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಆವರ್ತನೆಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ನಿಶ್ಚರಬಿಂದು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವಾಗಲೂ ಇದೇ ಗುಣವು ನಿಜವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಪುನಃ, R_2ನ್ನು ಮೊದಲು ನೆರವೇರಿಸಿ ಮುಂದೆ R_1ನ್ನು ನೆರವೇರಿಸಿದರೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ—

$$R_2 : x_1 = x_0 \cos \theta_2 - y_0 \sin \theta_2$$

$$y_1 = x_0 \sin \theta_2 + y_0 \cos \theta_2$$

$$R_1 : x_2 = x_1 \cos \theta_1 - y_1 \sin \theta_1$$

$$y_2 = x_1 \sin \theta_1 + y_1 \cos \theta_1$$

$$\therefore R_2.R_1 : x_2 = x_0 \cos (\theta_1 + \theta_2) - y_0 \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = x_0 \sin (\theta_1 + \theta_2) + y_0 \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\therefore R_1.R_2 = R_2.R_1$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆವರ್ತನೆಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3.2ಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಒಂದು ಸಾಧನೆ. ಆವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ $P, Q \in F$ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪಬಿಂದುಗಳು $P', Q' \in F'$ ಆಗಿರಲಿ. $f : F \to F'$ ಎಂಬುದು F ಮತ್ತು F′ ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ದೃಢ ಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. Aಯು ನಿಶ್ಚರಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 3.2) ಮತ್ತು θ ಆವರ್ತನೆಯ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಆವರ್ತನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ f ಒಂದು (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ. P ಮತ್ತು Q ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಆಗಿರಲಿ. ಅನುರೂಪಬಿಂದು P′, Q′ ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1', y_1') ಮತ್ತು (x_2', y_2') ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$x_1' = \alpha + (x_1 - \alpha) \cos \theta - (y_1 - \beta) \sin \theta$$

$$y_1' = \beta + (x_1 - \alpha) \sin \theta + (y_1 - \beta) \cos \theta$$

$$x_2' = \alpha + (x_2 - \alpha) \cos \theta - (y_2 - \beta) \sin \theta$$

$$y_2' = \beta + (x_2 - \alpha) \sin \theta + (y_2 - \beta) \cos \theta$$

ಇಲ್ಲಿ (α, β), A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.

$$\begin{aligned}[d(P, Q)]^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ [d(P', Q')]^2 &= (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 \\ &= [(x_1 - x_2)\cos\theta - (y_1 - y_2)\sin\theta]^2 \\ &\quad + [(x_1 - x_2)\sin\theta + (y_1 - y_2)\cos\theta]^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= [d(P, Q)]^2\end{aligned}$$

Note. The student should supply a similar proof for Theorem 3.3. He may conveniently choose the axis of reflection as the y-axis.

Theorem 3.6 *The product of translation and rotation is not commutative.*

Proof Let T indicate the translation and R indicate the rotation received by a point $P(x, y)$. Then the product of these two transformations in that order is $T.R$. If rotation is given first and then translation the product is $R.T$. We shall prove that $T.R \neq R.T$.

Let P receive T first and then R. As a consequence if $P(x, y)$ becomes $Q_1(x_1, y_1)$ we have

$$TR: \; x_1 = \alpha + (x + a - \alpha)\cos\theta - (y + b - \beta)\sin\theta$$

$$y_1 = \beta + (x + a - \alpha)\sin\theta + (y + b - \beta)\cos\theta$$

Let P receive R first and then T. As a consequence if $P(x, y)$ becomes $Q_2(x_2, y_2)$, we have

$$RT: \; x_2 = a + \alpha + (x - \alpha)\cos\theta - (y - \beta)\sin\theta$$

$$y_2 = b + \beta + (x - \alpha)\sin\theta + (y - \beta)\cos\theta$$

It is clear that $Q_1 \neq Q_2$ and so $TR \neq RT$.

Note (1) $TR = RT$ *only* when $a = b = 0$. In this case there is no translation; the problem ceases to exist.

$$[d\,(P,\ Q)]^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$[d\,(P',\ Q')]^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2$$

$$= [(x_1 - x_2)\cos\theta - (y_1 - y_2)\sin\theta]^2$$

$$+ [(x_1 - x_2)\sin\theta + (y_1 - y_2)\cos\theta]^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= [d\,(P,\ Q)]^2$$

ಸೂಚನೆ ಪ್ರಮೇಯ 3·3ಕ್ಕೆ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನೀಡಬೇಕು. ಅನುಕೂಲತೆಗಾಗಿ y ಅಕ್ಷವನ್ನು ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 3·6 ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ಆವರ್ತನೆ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ $P(x, y)$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ದೊರೆಯುವ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು T ಯೂ ಆವರ್ತನೆಯನ್ನು R ಊ ಸೂಚಿಸಲಿ. ಆಗ ಇವೆರಡು ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು T.R ಸೂಚಿಸುವುದು. ಇದರ ಬದಲು, ಆವರ್ತನೆಯನ್ನು ಮೊದಲು ನೀಡಿ ಮತ್ತೆ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ R.T ಆಗಿದೆ. $T.R \neq R.T$ ಎಂದು ನಾವು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

P ಗೆ ಮೊದಲು T ಯೂ ಮತ್ತೆ R ಊ ದೊರೆಯಲಿ. ಇವುಗಳ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿ $P(x, y)$ ಬಿಂದು $Q_1(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಾದರೆ,

$$TR: \quad x_1 = \alpha + (x + a - \alpha)\cos\theta - (y + b - \beta)\sin\theta$$

$$y_1 = \beta + (x + a - \alpha)\sin\theta + (y + b - \beta)\cos\theta$$

P ಗೆ ಮೊದಲು R ಊ ಮತ್ತೆ T ಯೂ ದೊರೆಯಲಿ. ಇವುಗಳ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿ $P(x, y)$ ಬಿಂದು $Q_2(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುವಾದರೆ

$$RT: \quad x_2 = a + \alpha + (x - \alpha)\cos\theta - (y - \beta)\sin\theta$$

$$y_2 = b + \beta + (x - \alpha)\sin\theta + (y - \beta)\cos\theta$$

$Q_1 \neq Q_2$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $TR \neq RT$.

ಸೂಚನೆ (1) $a = b = 0$ ಆದಾಗ **ಮಾತ್ರ** $TR = RT$ ಆಗುವುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ; ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯೇ ಉಳಿದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(2) The product of translation and rotation $(T.R)$ or rotation and translation $(R.T)$ is a rigid motion.

In $T.R$ let $P(x_1, y_1) \leftrightarrow P'(x_1', y_1')$ and $Q(x_2, y_2) \leftrightarrow Q'(x_2', y'_2)$. Then

$$x_1' = \alpha + (x_1 + a - \alpha)\cos\theta - (y_1 + b - \beta)\sin\theta$$

$$y_1' = \beta + (x_1 + a - \alpha)\sin\theta + (y_1 + b - \beta)\cos\theta$$

$$x_2' = \alpha + (x_2 + a - \alpha)\cos\theta - (y_2 + b - \beta)\sin\theta$$

$$y_2' = \beta + (x_2 + a - \alpha)\sin\theta + (y_2 + b - \beta)\cos\theta$$

$$\therefore [d(P, Q)]^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\begin{aligned}[d(P', Q')]^2 &= (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 \\ &= [(x_1 - x_2)\cos\theta - (y_1 - y_2)\sin\theta)^2 \\ &\quad + [(x_1 - x_2)\sin\theta + (y_1 - y_2)\cos\theta]^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= [d(P, Q)]^2\end{aligned}$$

The student should work out the case for $R.T$.

Worked-out Examples

1 Find the centre of the central conic represented by

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Let $(\bar{x}, \bar{y})$ be the centre. Give a translation to $S = 0$ so that its centre coincides with the origin. Since translation is a rigid motion the shape of the curve is not affected. If a point (x, y) becomes (X, Y) after translation we have

$$X = x - \bar{x}$$

$$Y = y - \bar{y}$$

(2) ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ಆವರ್ತನೆ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ (T.R) ಅಥವಾ ಆವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ (R.T) ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.

T.R ನಲ್ಲಿ $P(x_1, y_1) \leftrightarrow P'(x_1', y_1')$ ಮತ್ತು

$Q(x_2, y_2) \leftrightarrow Q'(x_2', y_2')$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$x_1' = \alpha + (x_1 + a - \alpha)\cos\theta - (y_1 + b - \beta)\sin\theta$$

$$y_1' = \beta + (x_1 + a - \alpha)\sin\theta + (y_1 + b - \beta)\cos\theta$$

$$x_2' = \alpha + (x_2 + a - \alpha)\cos\theta - (y_2 + b - \beta)\sin\theta$$

$$y_2' = \beta + (x_2 + a - \alpha)\sin\theta + (y_2 + b - \beta)\cos\theta$$

$$\therefore\ [d(P, Q)]^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$[d(P', Q')]^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2$$

$$= [(x_1 - x_2)\cos\theta - (y_1 - y_2)\sin\theta]^2 + [(x_1 - x_2)\sin\theta + (y_1 - y_2)\cos\theta]^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= [d(P, Q)]^2$$

R.Tಯೂ ದೃಢಚಲನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಸಾಧಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸೂಚಿಸುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$(\bar{x}, \bar{y})$ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ. $S = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಶಂಕುಜದ ಆಕೃತಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ನಂತರ (x, y) ಬಿಂದುವು (X, Y) ಬಿಂದುವಾದರೆ

$$X = x - \bar{x}$$

$$Y = y - \bar{y}$$

The transformed equation is

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2X(a\bar{x} + h\bar{y} + g) + 2Y(h\bar{x} + b\bar{y} + f) + a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + 2g\bar{x} + 2f\bar{y} + c = 0$$

Since the origin is the centre in this case the coefficients of X and Y must separately vanish.

$$\therefore \quad a\bar{x} + h\bar{y} + g = 0$$

$$h\bar{x} + b\bar{y} + f = 0$$

$$\therefore \quad \text{Centre is } \left[\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right]$$

2 A chain of two reflections carries two given points P_0, Q_0 to P_2, Q_2. Find the condition that P_0, Q_0 be carried to P_2, Q_2 by one reflection.

A figure will at once show that the required condition is that the perpendicular bisectors of $\overline{P_0P_2}$ and $\overline{Q_0Q_2}$ must coincide. Choose the first axis of reflection as the y-axis. A suitable x-axis can then be selected. Let the coordinates of P_0, Q_0 be (x_1, y_1), (x_2, y_2) respectively. If the reflections of these points with respect to the y-axis are P_1, Q_1 the coordinates of these points are respectively $(-x_1, y_1)$, $(-x_2, y_2)$. Let the second axis of reflection be

$$l : x\cos\theta + y\sin\theta = p$$

The reflections of P_1, Q_1 with respect to l are P_2, Q_2. If their coordinates are (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) respectively we have

$$X_1 = x_1\cos 2\theta - y_1\sin 2\theta + 2p\cos\theta$$

$$Y_1 = x_1\sin 2\theta + y_1\cos 2\theta + 2p\sin\theta$$

with similar expressions for X_2, Y_2. The required condition is that the perpendicular bisectors of $\overline{P_0P_2}$ and $\overline{Q_0Q_2}$ should coincide. Therefore

$$\frac{x_1 - X_1}{x_2 - X_2} = \frac{y_1 - Y_1}{y_2 - Y_2} = \frac{x_1^2 + y^2 - X_1^2 - Y_1^2}{x_2^2 + y_2^2 - X_2^2 - Y_2^2}$$

ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ ಹೀಗಿದೆ—

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2X(a\bar{x} + h\bar{y} + g) + 2Y(h\bar{x} + b\bar{y} + f)$$
$$+ a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + 2g\bar{x} + 2f\bar{y} + c = 0$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂಲಬಿಂದುವೇ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು.

$$a\bar{x} + h\bar{y} + g = 0$$

$$h\bar{x} + b\bar{y} + f = 0$$

$$\therefore \text{ ಕೇಂದ್ರವು } \left[\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right]$$

2 P_0, Q_0 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪ್ರತಿಫಲನಾಪರಂಪರೆ P_2, Q_2 ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುತ್ತವೆ. P_0, Q_0 ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರತಿಫಲನದಿಂದ P_2, Q_2 ಬಿಂದುಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ ನಿಯಮವೇನು?

ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಬೇಕಾದ ನಿಯಮವು $\overline{P_0P_2}$ ಮತ್ತು $\overline{Q_0Q_2}$ ರ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಮೊದಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವನ್ನು y-ಅಕ್ಷವಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕು. ಅನುಕೂಲವಾದ ಒಂದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಆರಿಸಬಹುದು. P_0, Q_0 ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಆಗಿರಲಿ. y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರತಿಫಲನಗಳು P_2, Q_2 ಆಗಿದ್ದರೆ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(-x_1, y_1)$, $(-x_2, y_2)$ ಆಗುವುವು. ಎರಡನೆಯ ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷ

$$l: \; x\cos\theta + y\sin\theta = p$$

ಆಗಿರಲಿ. l ನ್ನು ಕುರಿತು P_1, Q_1 ರ ಪ್ರತಿಫಲನಗಳು P_2, Q_2 ಆಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (X_1, Y_1) ಮತ್ತು (X_2, Y_2) ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$X_1 = x_1\cos 2\theta - y_1 \sin 2\theta + 2p\cos\theta$$

$$Y_1 = x_1\sin 2\theta + y_1\cos 2\theta + 2p\sin\theta$$

ಆಗುವುವು. X_2, Y_2 ಇದೇ ತರದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿವೆ. $\overline{P_0P_2}$ ಮತ್ತು $\overline{Q_0Q_2}$ ಇವುಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಲು ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ

$$\frac{x_1 - X_1}{x_2 - X_2} = \frac{y_1 - Y_1}{y_2 - Y_2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 - X_1^2 - Y_1^2}{x_2^2 + y_2^2 - X_2^2 - Y_2^2}$$

On simplification this leads to

$$(x_1y_2 - x_2y_1) \sin \theta = p(x_1 - x_2)$$

Therefore, twice the area of the triangle formed by the origin and the two given points is equal to the rectangle contained by the y-intercept of the (second) axis of reflection and the difference of the abscissae of the given points.

The idea can be generalised as follows: If $A_0, B_0, C_0, \ldots$ are carried to $A_n, B_n, C_n, \ldots$ by a chain of n reflections the condition that the points $A_0, B_0, C_0, \ldots$ be carried to $A_n, B_n, C_n, \ldots$ in one reflection is that the perpendicular bisectors of $\overline{A_0A_n}, \overline{B_0B_n}, \overline{C_0C_n}, \ldots$ all must coincide.

3.9 Rigid dynamics and rigid motion

A doubt may arise as to the similarity or otherwise of the motion of a rigid body and rigid motion. In moving a rigid body from one position to another the order of precedence of translation and rotation is immaterial: any one of these two independent motions can take priority, the end-position of the rigid body will be the same. In rigid motion $TR \neq RT$. The student should perform a practical experiment by moving a plane lamina in two possible ways (T first, R next; and R first, T next) and understand the significance of this apparent disagreement.

Exercise 3.1

1 $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2gy + c = 0$ is a conic. Discuss its nature by the application of the concept of rigid motion.

2 Show that a rigid motion as defined by a translation or a rotation or the product of the two (TR or RT) does not affect the angles between two intersecting straight lines.

3 Show that the transformation

$$X = ax + by + c_1$$

$$Y = -bx + ay + c_2, \quad a^2 + b^2 = 1$$

determines a rigid motion.

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ $(x_1y_2 - x_2y_1)\sin\theta = p(x_1 - x_2)$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದು ಮತ್ತು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಎರಡರಷ್ಟು, ಎರಡನೆಯ ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷದ y-ರೇಖಾಂತರ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇವು ರಚಿಸುವ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು: $A_0, B_0, C_0, \ldots$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು n ಪ್ರತಿಫಲನಾಪರಂಪರೆ $A_n, B_n, C_n, \ldots$ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯಲಿ; $A_0, B_0, C_0 \ldots$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರತಿಫಲನದಿಂದ $A_n, B_n, C_n, \ldots$ ಬಿಂದುಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ $\overline{A_0A_n}, \overline{B_0B_n}, \overline{C_0C_n}, \ldots$ ಇವುಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಬೇಕು.

3.9 ದೃಢಚಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ದೃಢಚಲನೆ

ದೃಢವಸ್ತುವಿನ ಚಲನೆಗೂ ದೃಢಚಲನೆಗೂ ಸಾಮ್ಯ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ವನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಸಂದೇಹ ಮೂಡಬಹುದು. ಒಂದು ದೃಢವಸ್ತುವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುವಾಗ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ, ಆವರ್ತನೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಮೊದಲು ಯಾವುದು ಮತ್ತೆ ಎನ್ನುವುದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಈ ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಮೊದಲು ನೆರವೇರಬಹುದು, ದೃಢವಸ್ತುವಿನ ಅಂತಿಮಸ್ಥಾನ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು. ದೃಢ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ $TR \neq RT$. ಒಂದು ಸಮತಲ ತಗಡನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಚಲಿಸು ವಂತೆ (T ಮೊದಲು R ಮತ್ತೆ; ಪುನಃ R ಮೊದಲು T ಮತ್ತೆ—ಇವೆರಡು ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಡೆಸಬೇಕು) ಮಾಡಿ ಮೇಲುನೋಟಕ್ಕೆ ಕಾಣುವ ಈ ಅಸಮಂಜಸತೆಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1 $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಒಂದು ಶಂಕುಜ. ದೃಢಚಲನೆಯ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದರ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

2 ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಅಥವಾ ಆವರ್ತನೆ ಅಥವಾ ಇವೆರಡರ ಗುಣಲಬ್ಧ (TR ಅಥವಾ RT) ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವ ದೃಢಚಲನೆಯು ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 $X = ax + by + c_1 \quad Y = -bx + ay + c_2, \quad a^2 + b^2 = 1$ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 Let the two rigid motions M_1 and M_2 be defined as follows:

$$M_1: \quad X = ax + by + c_1$$
$$Y = -bx + ay + c_2, \quad a^2 + b^2 = 1$$

$$M_2: \quad X' = a'X + b'Y + d_1$$
$$Y' = -b'X + a'Y + d_2, \quad a'^2 + b'^2 = 1$$

Prove that M_1M_2 and M_2M_1 are rigid motions. Show further that $M_1M_2 \neq M_2M_1$.

5 Let the following n equations determine n rigid motions:

$$R_1: \quad x_1 = x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1$$
$$y_1 = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1$$

$$R_2: \quad x_2 = x_1 \cos \alpha_2 - y_1 \sin \alpha_2$$
$$y_2 = x_1 \sin \alpha_2 + y_1 \cos \alpha_2$$

$$R_3: \quad x_3 = x_2 \cos \alpha_3 - y_2 \sin \alpha_3$$
$$y_3 = x_2 \sin \alpha_3 + y_2 \cos \alpha_3$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$R_n: \quad x_n = x_{n-1} \cos \alpha_n - y_{n-1} \sin \alpha_n$$
$$y_n = x_{n-1} \sin \alpha_n + y_{n-1} \cos \alpha_n$$

Find $R_1R_2 \ldots . R_n$ and show that it is also a rigid motion. In particular show $R_1R_2 = R_2R_1$. Interpret the result.

6 In any rigid motion affecting three points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) show that

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

is an invariant. Interpret it geometrically.

4 M_1 ಮತ್ತು M_2 ಎಂಬ ಎರಡು ದೃಢಚಲನೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗಿದೆ—

$$M_1: \; X = ax + by + c_1$$
$$Y = -bx + ay + c_2, \quad a^2 + b^2 = 1$$
$$M_2: \; X' = a'X + b'Y + d_1$$
$$Y' = -b'X + a'Y + d_2, \quad a'^2 + b'^2 = 1$$

M_1M_2 ಮತ್ತು M_2M_1 ದೃಢಚಲನೆಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಮತ್ತು $M_1M_2 \neq M_2M_1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5 ಈ ಕೆಳಗಿನ n ಸಮೀಕರಣಗಳು n ದೃಢಚಲನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ.

$$R_1: \; x_1 = x\cos\alpha_1 - y\sin\alpha_1$$
$$y_1 = x\sin\alpha_1 + y\cos\alpha_1$$
$$R_2: \; x_2 = x_1\cos\alpha_2 - y_1\sin\alpha_2$$
$$y_2 = x_1\sin\alpha_2 + y_1\cos\alpha_2$$
$$R_3: \; x_3 = x_2\cos\alpha_3 - y_2\sin\alpha_3$$
$$y_3 = x_2\sin\alpha_3 + y_2\cos\alpha_3$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$R_n: \; x_n = x_{n-1}\cos\alpha_n - y_{n-1}\sin\alpha_n$$
$$y_n = x_{n-1}\sin\alpha_n + y_{n-1}\cos\alpha_n$$

$R_1R_2R_3 \ldots R_n$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದೂ ಸಹ ದೃಢಚಲನೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. $R_1R_2 = R_2R_1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

6 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಯಾವುದೇ ದೃಢಚಲನೆಯಲ್ಲಿ
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$
ಒಂದು ನಿಶ್ಚರವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದರ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥವೇನು?

7 Find the centre and lengths of the axes of

(a) $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$

(b) $8x^2 + 12xy - 8y^2 + 12x + 4y + 3 = 0$

8 If a rigid motion R is defined by

$$X = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2}$$

find the values of R^3, R^6 and interpret their meaning.

9 Let

$$M: \quad X = \frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} + 3$$

$$Y = \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} + 1$$

determine a rigid motion. Find out two rotations (about the origin) R and R' and two translations T and T' such that

$$RT = T'R' = M$$

[Let

$$R: \quad x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

and

$$T: \quad X = x_1 + a$$

$$Y = y_1 + b$$

$$\therefore \quad RT: \ X = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a$$

$$Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b$$

This is identical with M.

$$\therefore \quad \frac{\cos \alpha}{\frac{3}{5}} = \frac{\sin \alpha}{\frac{4}{5}} = \frac{a}{3} = \frac{b}{1} = \pm 1, \text{ etc.}$$]

10 Show that in a rigid motion the relationship

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

7 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶಂಕುಜಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(*a*) $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$

(*b*) $8x^2 + 12xy - 8y^2 + 12x + 4y + 3 = 0$

8 R ಎಂಬ ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು

$$X = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. R^3, R^6 ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಅರ್ಥ ವಿವರಿಸಿರಿ.

9 $$M: X = \frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} + 3$$

$$Y = \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} + 1$$

ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ R ಮತ್ತು R′ ಎಂಬ ಎರಡು ಆವರ್ತನೆಗಳನ್ನೂ T ಮತ್ತು T′ ಎಂಬ ಎರಡು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನೂ RT = T′R′ = M ಆಗುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[R : $x_1 = x\cos a - y\sin a$

$y_1 = x\sin a + y\cos a$

T : $X = x_1 + a$

$Y = y_1 + b$

ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \text{RT}: X = x\cos a - y\sin a + a$$

$$Y = x\sin a + y\cos a + b$$

ಇದು M ಆಗಬೇಕು.

$$\therefore \frac{\cos a}{\frac{3}{5}} = \frac{\sin a}{\frac{4}{5}} = \frac{a}{3} = \frac{b}{1} = 1$$

ಇತ್ಯಾದಿ]

10 ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ

between any point (x_1, y_1) and a circle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

is an invariant. Interpret the meaning geometrically.

11 Find the condition that a transformation defined by

$$X = a_1x + b_1y + c_1$$

$$Y = a_2x + b_2y + c_2$$

may determine a rigid motion.

12 With the notations and explanations stated in the worked-out example number 2 on page 47, prove the following:

(*a*) The three axes of reflection (*viz.*, the y-axis, $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ and the perpendicular bisector of $\overline{P_0P_2}$) and the joins of P_0, Q_0; P_1, Q_1; P_2, Q_2 concur at the circumcentre of either of the triangles $P_0P_1P_2$, $Q_0Q_1Q_2$. Give a geometrical meaning to this. The circumcentre is $(0, p \operatorname{cosec} \theta)$ and the circumradii are

$$\frac{x_1\, d(P_0, Q_0)}{x_1 - x_2}, \quad \frac{x_2\, d(P_0, Q_0)}{x_1 - x_2}$$

respectively. Why are these circumradii proportional to $x_1 : x_2$?

(*b*) If α, β be the inclinations of $\overleftrightarrow{P_0Q_0}$, $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$ then $\beta - \alpha = 2\theta$. A rotation of P_0Q_0 about the circumcentre through an angle 2θ brings it into the position $\overline{P_2Q_2}$.

(*c*) If a set of n points $P_0, Q_0, R_0, \cdots$ satisfy the conditions of the problem then they are collinear. Hence if n points after a chain of two reflections are such that they can be reflected by one reflection to the final positions then they are collinear.

(*d*) If P_2, Q_2 are carried to P_3, Q_3 by a third reflection in the axis

$$x \cos \phi + y \sin \phi = q$$

the condition that P_0, Q_0 be carried to P_3, Q_3 in one reflection is

$$(x_1 - x_2)(p \cos \phi - q \cos \theta) = (y_1 - y_2)(p \sin \phi - q \sin \theta)$$

If γ be the inclination of $\overleftrightarrow{P_3Q_3}$ then

$$\alpha + \gamma = 2(\phi - \theta).$$

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧ ನಿಶ್ಚರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದರ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥವೇನು?

11 $X = a_1 x + b_1 y + c_1$

$Y = a_2 x + b_2 y + c_2$

ಸಮೀಕರಣಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಪರಿವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ದೃಢಚಲನೆಯಾಗಲು ನಿಯಮವೇನು?

12 ಪುಟ 7 ರಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಸಂಕೇತಗಳ ಮತ್ತು ವಿವರಣೆಗಳ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ:

(*a*) ಮೂರು ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷಗಳೂ (ಅಂದರೆ, y-ಅಕ್ಷ, $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ ಮತ್ತು $\overline{P_0P_2}$ ರ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ) P_0, Q_0 ; P_1, Q_1 ; P_2, Q_2 ಇವುಗಳ ಜೋಡಣೆಗಳೂ $P_0P_1P_2$, $Q_0Q_1Q_2$ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರಿಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುವು. ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥ ಕೊಡಿ. ಪರಿಕೇಂದ್ರ $(0, p\operatorname{cosec}\theta)$ ಮತ್ತು ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$\frac{x_1\, d\,(P_0, Q_0)}{x_1 - x_2},\quad \frac{x_2\, d\,(P_0, Q_0)}{x_1 - x_2}$$ ಆಗಿವೆ.

ಈ ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯಗಳು $x_1 : x_2$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಏಕೆ ಇವೆ?

(*b*) $\overleftrightarrow{P_0Q_0}$, $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$ ಇವುಗಳ ಬಾಗುಗಳು α, β ಆಗಿದ್ದರೆ $\beta - \alpha = 2\theta$.

$\overline{P_0Q_0}$ ಯನ್ನು ಪರಿಕೇಂದ್ರದ ಸುತ್ತ 2θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ $\overline{P_2Q_2}$ ಸ್ಥಾನ ಸೇರಬಹುದು.

(*c*) n ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದರೆ ಅವು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿರುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ, n ಬಿಂದುಗಳು ಎರಡು ಪ್ರತಿಫಲನ ಪರಂಪರೆಯಿಂದ ಹೊಂದುವ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರತಿಫಲನದಿಂದ ಹೊಂದುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಅವು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

(*d*) $x\cos\phi + y\sin\phi = q$ ಎಂಬ ಮೂರನೆಯ ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು P_2, Q_2 ಬಿಂದುಗಳು P_3, Q_3 ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, P_0, Q_0 ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರತಿಫಲನದಿಂದ P_3, Q_3 ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಲು ಆವಶ್ಯಕವಾದ ನಿಯಮ $(x_1 - x_2)(p\cos\phi - q\cos\theta) = (y_1 - y_2)(p\sin\phi - q\sin\theta)$.

$\overleftrightarrow{P_3Q_3}$ ರ ಬಾಗು γ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\alpha + \gamma = 2(\phi - \theta)$.

If a set of n points $P_0, Q_0, R_0, \ldots\ldots$, satisfy the conditions of this problem then they are collinear.

13 A given point $P(x, y)$ rotates about another given point $A(\alpha, \beta)$ through an angle θ and attains the position $Q(X, Y)$. Prove that

$$(a)\quad 2\alpha = x + X + (y - Y)\cot\frac{\theta}{2}$$

$$2\beta = -(x - X)\cot\frac{\theta}{2} + y + Y$$

$$(b)\quad 2\alpha(x + X) + 2\beta(y - Y) = OP^2 - OQ^2$$

where O is the origin.

14 ρ indicates a reflection and T a translation. Prove that $\rho\, T$ and $T\,\rho$ are rigid m tions. Prove further that $\rho\, T$ is not commutative.

15 $\rho\, T$ transforns a geometrical figure $\{P\}$ to $\{P_1\}$ while $T\,\rho$ transforms $\{P\}$ to $\{P_2\}$. Show that the axis of reflection is perpendicular to the lines $\overleftrightarrow{P_1P_2}$. Show further that $\overline{P_1Q_1}$ is either parallel to $\overline{P_2Q_2}$ and in this case pairs of corresponding sides of the two figures are parallel to one another; or not parallel and in this case the two figures are the reflections of one another on an axis which is parallel to the (original) axis of reflection. (It may be added that in the former case the lines $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ are also parallel to one another.)

P_0, Q_0, R_0, ...ಎಂಬ n ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿರುವುವು.

13 $P(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು $A(\alpha, \beta)$ ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಿ $Q(X, Y)$ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದುವುದು. ಆಗ

(*a*) $2\alpha = x + X + (y - Y)\cot\dfrac{\theta}{2}$

$$2\beta = -(x - X)\cot\frac{\theta}{2} + y + Y$$

(*b*) $2\alpha(x + X) + 2\beta(y - Y) = OP^2 - OQ^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. (O ಮೂಲಬಿಂದು).

14 ρ ಒಂದು ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನೂ T ಒಂದು ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ρT ಮತ್ತು $T\rho$ ದೃಢಚಲನೆಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ρT ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲವೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

15 ρT ಯು ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿ $\{P\}$ ಯನ್ನು $\{P_1\}$ ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ, $T\rho$ ವು $\{P\}$ ಯನ್ನು $\{P_2\}$ ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು. ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವು $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. $\overline{P_1Q_1}$ ಒಂದೋ $\overline{P_2Q_2}$ ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಇವೆರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಯುಗ್ಮಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ; ಅಥವಾ, ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದೂ, ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಇವೆರಡು ಆಕೃತಿಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತಿಫಲನಗಳೆಂದೂ, ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷವು (ಮೂಲ) ಪ್ರತಿಫಲನಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ. (ಮೊದಲಿನ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ.)

ANSWERS

Exercise 1.1

1 (*a*) Common point. (*b*) Angle between the lines.

2 2, 7, 8, 3, 6, 10

7 $5X^2 - 6XY + 5Y^2 - 8 = 0$

8 $25Y^2 + 100X - 60Y - 124 = 0$

Exercise 1.2

1 Yes	2 No	3 Yes
8 Injective	9 Surjective	10 Bijective

Exercise 2.1

10 Yes   11 Yes

Exercise 3.1

11 $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1$

$$a_1 = -b_2$$

$$a_2 = -b_1$$

GLOSSARY

ಶಬ್ದಕೋಶ

Abstract ಅಮೂರ್ತ

Analytical treatment ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಪ್ರಕಾರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ 40

Angle ಕೋನ 10

Angle addition postulate ಕೋನ ಸಂಕಲನ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 12

Angle construction postulate ಕೋನರಚನೆಯ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 10

Angle measurement postulate ಕೋನಮಾನದ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 11

Angles—Rigid Motion between ಎರಡು ಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ದೃಢ ಚಲನೆ 12

Axioms ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಗಳು 2

Axis of symmetry ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷ 31

Betweenness ಅಂತರತೆ 3

Bijective ಬೈಜೆಕ್ಟಿವ್ 8

Chain reflections ಪ್ರತಿಫಲನಾ ಪರಂಪರೆ 34

Circles—rigid motion between ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವೆ ದೃಢಚಲನೆ 25

Congruence ಸರ್ವಸಮತ್ವ 4

Congruence and rigid motion ಸರ್ವಸಮತ್ವ ಮತ್ತು ದೃಢಚಲನೆ 39

Conic–its nature by rigid motion ದೃಢಚಲನೆಯ ಮೂಲಕ ಶಂಕುಜದ ರೂಪ 46

Convex set ಉಬ್ಬುಗಣ 3

Correspondence ಹೊಂದಾಣಿಕೆ 4

Distance–preservation ದೂರ ಉಳಿತಾಯ 19, 20

Edge ಅಂಚು 1

Element ಮೂಲಾಂಶ, ಗಣಾಂಶ 1

Equidistance relationship ಸಮಾನ ದೂರ ಸಂಬಂಧ 12

Exterior ಹೊರಗೆ 10

Full rotation ಪೂರ್ಣಾವರ್ತನೆ 31

Geometrical figure ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿ 1

Geometrical figures—rigid motion between ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ನಡುವೆ ದೃಢಚಲನೆ 26

Geometrical transformations ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು 28

Halfplanes ಅರ್ಧಸಮತಲಗಳು 9

Half-rotation ಅರ್ಧಾವರ್ತನೆ 31

Image ಪ್ರತಿಬಿಂಬ 7

Inclination ಬಾಗು 51

Initial proposition ಮೂಲ ಭಾವನೆ, ಮೂಲ ಹೇಳಿಕೆ, ಪ್ರಾರಂಭಿಕೋಕ್ತಿ 2

Injective ಇಂಜೆಕ್ಟಿವ್ 7

Interior ಒಳಗೆ 7

Into ಒಳಗಿನ 7

Invariant ನಿಶ್ಚರ 31

Isometric ಐಸೊಮೆಟ್ರಿಕ್, ಸಮಾನ ಮಾನ 18

Mapping ಚಿತ್ರಣ 6

Measure of an angle ಕೋನ ಮಾನ 10

Motion ಚಲನೆ 20

One-one ಒಂದು-ಒಂದು, ಏಕ-ಏಕ, (1, 1) 4

One and only one ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ 8
Onto ಮೇಲಣ 7
Operand ಪರಿಕರ್ಮಿತ 5
Operator ಪರಿಕರ್ಮಿ 5
Operation ಪರಿಕರ್ಮ 5
Opposite rays ವಿರೋಧ ಕಿರಣಗಳು 3
Opposite sides ವಿರೋಧಬಾಹುಗಳು 9
Plane ಸಮತಲ 1
Plane separation postulate ಸಮತಲ ಬೇರ್ಪಡೆಯ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 9
Postulate ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ 2
Product of reflections ಪ್ರತಿಫಲನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 34, 61
Product of translations ಆವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 43
Product of translations ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 41
Product of translation and rotation ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ಆವರ್ತನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 45
Ray ಕಿರಣ 3
Reflection ಪ್ರತಿಫಲನ 32
Reflection and rigid motion ಪ್ರತಿಫಲನ ಮತ್ತು ದೃಢಚಲನೆ 32, 44
Rigid body ದೃಢವಸ್ತು 18
Rigid dynamics and rigid motion ದೃಢಚಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ದೃಢಚಲನೆ 48
Rotatory motion ಆವರ್ತನ ಚಲನೆ 17
Rotation ಆವರ್ತನೆ 29, 42
Rotation and rigid motion ಆವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ದೃಢಚಲನೆ 20
Same side ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವ, ಒಂದೇ ಮಗ್ಗುಲು 9
Segment ಖಂಡ 3
Set ಗಣ 1
Side ಬಾಹು 10
Sides of the angle ಕೋನದ ಬಾಹುಗಳು 10
Space ಆಕಾಶ 1
Surjective ಸರ್ಜೆಕ್ಟಿವ್ 7
Symmetry about a line ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗತ್ವ 31
Symmetry about a point ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಮಾಂಗತ್ವ 31
Theorems on rigid motion ದೃಢಚಲನೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳು 20
Transformant ಪರಿವರ್ತಿತ 5
Transformation ಪರಿವರ್ತನೆ 5
Translatory motion ಸರಳ ಚಲನೆ 17
Translation ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ 28, 40
Translation and rigid motion ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ದೃಢಚಲನೆ 28, 41
Triangle ತ್ರಿಕೋನ 11
Triangles—rigid motion between ತ್ರಿಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ದೃಢಚಲನೆ 23
Undefined terms ಅವ್ಯಾಖ್ಯಿತ ಪದಗಳು 1
Vertex ಶೃಂಗ 10

Bibliography

Karol Borsuk and Wanda Szmielew — *Foundations of Geometry*

William C. Graustein .. *Introduction to Higher Geometry*

Sen R. N. .. *A Course of Geometry*

Sen R. N. .. *Lectures on Foundations of Geometry*

Singh, S. K., Noronha, F. J. and Amur, K. S. — *Geometry and Trigonometry* (Chapter on Rigid Motion)

The Yale University Publications — *School Mathematics Study Group* (Note on Rigid Motion)

1073–69. ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್, ಮೈಸೂರು ರೋಡು, ಬೆಂಗಳೂರು–೧೮

13 ಪ್ರೀಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ 2,
ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ .. 4-50
—ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರು

14 ಆರ್ಥಿಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ (I ಬಿ.ಎ.) 7-00
—ಟಿ. ಎನ್. ವಿಜಯಪ್ಪ ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣನಾಯಕ್

15 ನೀತಿಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎ.) 3-40
—ಎಸ್. ರಂಗಾಚಾರ್

16 ಗಣಿತತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ (II ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.) 2-00
—ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹಾ ಮತ್ತು ಇತರರು

17 ಧ್ವನಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.) .. 3-00
—ಕೆ. ಶೇಷಾದ್ರಿ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

18 ಮತಧರ್ಮ ತತ್ತ್ವಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎ.)
—ಎಂ. ಯಾಮುನಾಚಾರ್ಯ

19 ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.)
—ಟಿ. ಹೆಚ್. ವೆಂಕಟಶೆಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಇತರರು

20 ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ (I ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.)
—ಆರ್. ಗುರುರಾಜರಾವ್

21 ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತ (I ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.)
—ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸೈಯ್ಯಂಗಾರ್

22 General Science
—M. Shadaksharaswamy and others

I B A. 3-00

II B.A. 1-30

23 ಗೃಹವಿಜ್ಞಾನ
—ಎಂ. ಆರ್. ವಿಶಾಲಾಕ್ಷಿ ಮತ್ತು ಎಲ್. ವಾಸಂತಿ

24 ರಾಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ (II ಬಿ.ಎ.)
—ಹೆಚ್. ಆರ್. ದಾಸೇಗೌಡ

25 ದೃಢಚಲನೆ (I ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.) 2-00
—ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

26 ಭಾರತೀಯ ಸಂಗೀತ ವಾದ್ಯಗಳು (I ಬಿ.ಎ.)
—ಎಲ್. ರಾಜಾರಾವ್

27 ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.)
—ಬಿ. ವಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

28 ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.)
—ಹೆಚ್. ಡಿ. ಸಿದ್ಧರಂಗಪ್ಪ

29 ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತ (II ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.)
—ಡಿ. ವಿ. ರಾಮಣ್ಣ ಮತ್ತು ಎಂ. ಕೆ. ಇಂದಿರಾದೇವಿ

30 ಜ್ಯಾಮಿತಿ (II ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ.)
—ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸೈಯ್ಯಂಗಾರ್ ಮತ್ತು ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

31 ಲೆಕ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ (ಪಿ.ಯು.ಸಿ.)
—ಎಚ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸಮೂರ್ತಿ

ಇತರ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

1 ಕುದುರೆ ಮುಖದೆಡೆಗೆ (ಪ್ರವಾಸ ಚಿತ್ರ) 3–00
—ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

2 Art of Decision-making in an Age of Science .. 1–50
—S. Bhagavantam

3 ನಗೆಯ ನೆಲೆ 0–55
—ಎಸ್. ಕೆ. ರಾಮಚಂದ್ರರಾವ್

4 ನಕ್ಷತ್ರ ಲೋಕ 0–55
—ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

5 Phonetics in the Study of Classical Languages 1–50
—Suniti Kumar Chatterji

Trade enquiries to

Chairman

KANNADA TEXT BOOK COMMITTEE

BANGALORE 9

BANGALORE PRESS